NUMERISCHE SIMULATION VON WOLKENKOLLEKTIVEN ZUR BESTIMMUNG DES BEDECKUNGSGRADES VON KONVEKTIONSFELDERN

INAUGURAL-DISSERTATION

zur

Erlangung der Doktorwürde

des

Fachbereichs 24 Geowissenschaften

der

Freien Universität Berlin

vorgelegt von

Ingo Jacobsen

aus Eutin

1973

NUMERISCHE SIMULATION VON WOLKENKOLLEKTIVEN ZUR BESTIMMUNG DES BEDECKUNGSGRADES VON KONVEKTIONSFELDERN

INAUGURAL-DISSERTATION

zur

Erlangung der Doktorwürde

des

Fachbereichs 24 Geowissenschaften

der

Freien Universität Berlin

vorgelegt von

Ingo Jacobsen

aus Eutin

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Erster Referent: Prof. Dr. H. Fortak

Zweiter Referent: Prof. Dr. H. Riehl

Tag der mündlichen Prüfung: 12. Juli 1973

ZUSAMMENFASSUNG

Der relative Flächenanteil, den aktive Konvektionszellen in einem großräumigen Wolkenfeld einnehmen, ist eine der entscheidenden Größen in allen neueren Ansätzen zur Parametrisierung der organisierten Konvektion.

In der vorliegenden Arbeit wird der Bedeckungsgrad ermittelt, der bei gegebenen großräumigen Feldbedingungen als der wahrscheinlichste gelten kann. Dazu dient das Modell eines Wolkenkollektivs, dessen Elemente eindimensionale flächengemittelte Konvektionszellen und ihre gemeinsame Umgebung sind. Der wahrscheinlichste Bedeckungsgrad wird aus der numerischen Integration dieses Modells unter Anwendung der folgenden Kriterien gewonnen:

1. Effektivität des konvektiven Systems,
2. Möglichkeit der Koexistenz von Wolken verschiedener Intensität,
3. Stabilität des Wolkenfeldes.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41552709_0015

INHALT

1. EINLEITUNG 1

2. DAS GLEICHUNGSSYSTEM 6

2.1 Entrainment 1o
2.2 Einarbeitung der Mikrophysik 18
2.3 Randbedingungen 22
2.4 Temperatur- und Feuchtebilanzgleichungen 23

3. ERGEBNISSE 26

3.1 Numerische Formulierung 26
3.2 Die Einzelwolke ohne large - scale Konvergenz 31
3.21 Struktur der Einzelwolke 31
3.22 Bilanz der Einzelwolke 47
3.3 Das Wolken-System ohne large - scale Konvergenz 53
3.4 Das Wolken-System bei large-scale Konvergenz 68

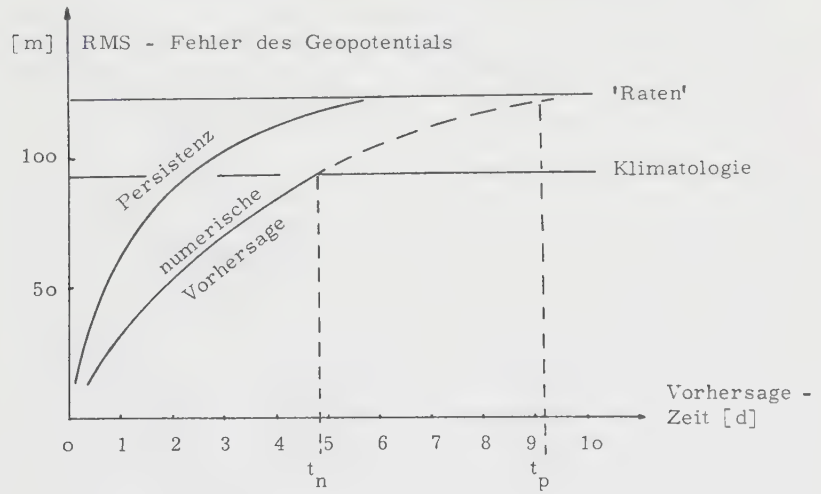
4. LITERATUR 75

1. EINLEITUNG

Durch die Anwendung physikalisch-mathematischer Modelle konnte der Zeitraum einer brauchbaren Wettervorhersage wesentlich ausgedehnt werden. Wie die Auswertung eines Drei-Parameter-Modells durch DÖÖS (1969) zeigt, sind aber auch den numerischen Vorhersagemodellen noch recht enge Grenzen gesetzt, die eine Mittel- oder Langfristvorhersage bislang unmöglich machen. Die Gründe hierfür liegen

1. in einem unzureichenden Beobachtungsnetz,
2. in Interpolationsfehlern, die bei der Analyse der Beobachtungen auftreten, und
3. in mathematischen und physikalischen Unzulänglichkeiten der Modelle.

Dieser letzte Punkt trifft in gleichem Maße für Modelle zur Simulierung der allgemeinen atmosphärischen Zirkulation zu.



t_n Zeitgrenze für brauchbare Vorhersage

t_p normale Definition der 'predictability'

Abb. 1.1: Genauigkeit verschiedener Vorhersagemethoden nach DÖÖS (1969).

Die Mehrzahl der physikalischen Probleme hat ihren Ursprung in der Wechselwirkung der groß- und kleinräumigen Prozesse in der Atmosphäre, von denen nur die großräumigen direkt von den Modellen erfaßt werden können. Da die Vorgänge in den kleineren Scales oft erhebliche energetische und dynamische Wirkungen auf das großräumige Feld ausüben, fällt ihrer Simulation in Modellen zur Langfristvorhersage und der allgemeinen Zirkulation eine entscheidende Bedeutung zu.

Die Wechselwirkung zwischen den verschiedenen Scales macht sich durch eine Folge von Korrelationstermen in den hydro-thermodynamischen Gleichungen bemerkbar (FORTAK (1968)). Die physikalische Interpretation dieser durch kleinräumige Prozesse erzeugten Korrelationsterme als Funktionen der großräumigen Feldgrößen wird als Parametrisierung bezeichnet. Sofern wir nicht rein stochastische Prozesse betrachten, die eine Beschreibung durch Austauschansätze zulassen, setzt eine derartige Parametrisierung eine genaue Untersuchung des Ablaufs und der Wirkung der zu parametrisierenden Vorgänge voraus.

Die Konvektion gehört zu den Prozessen, die in jedem Modell, das langfristig Wettervorgänge simulieren soll, parametrisiert werden müssen:

1. Die einzelne Konvektionszelle ist klein in ihrer Ausdehnung und kurz in ihrer Lebensdauer verglichen mit den Feldern der großräumigen Strömung.
2. Andererseits haben Wolkenfelder mit einer ausgeprägten Organisationsstruktur (transversale und longitudinale Bänder, offene und geschlossene Zellen) und einer Ausdehnung bis zu 2ooo km eine wesentliche energetische Wirkung auf die allgemeine Zirkulation der Atmosphäre; denn durch die konvektive Aktivität wird:
   a) ein vertikaler Ausgleich in der Atmosphäre vollzogen, werden zugleich
   b) oft großräumige Gebilde (z.B. Zyklonen) verstärkt und damit wird
   c) auch der horizontale Ausgleich zwischen niedrigen und höheren Breiten beschleunigt.

Die ausgeprägte Organisationsstruktur der Konvektionsfelder läßt eine Parametrisierung durch einen Austauschansatz nicht zu. Auch das 'convektive adjustment', das lediglich den Punkt 2a berücksichtigt, war wenig erfolgreich, denn die Annahme einer Schichtwolke, die sofort nach der Überschreitung gewisser Grenzwerte ausregnet, wird dem komplizierten Konvektionsmechanismus nicht gerecht. Ein wesentlicher Teil dieses Mechanismus ist, daß die Wärme und die Feuchte nur in sehr engen Aufwindschloten in die höheren Schichten transportiert werden, während die Luft um diese Aufwindschlote herum langsam absinkt. Dieser Gedanke wurde im Zusammenhang mit der Parametrisierung der Konvektion zuerst von KASAHARA (1963) formuliert, in dem er das Konvektionsfeld in Aufwindschlote mit der relativen Flächenbedeckung σ und den sie umgebenden Bereich der Größe $1 - \sigma$ zerlegte. Die großräumigen Mittelwerte und die vertikalen konvektiven Transporte können dann formal durch

$$\overline{A} = \sum_{i=1}^{N} \sigma_i \hat{A}_i + \left(1 - \sum_{i=1}^{N} \sigma_i\right) \hat{A}_e \tag{1}$$

bzw.

$$\overline{w'A'} = \sum_{i=1}^{N} \sigma_i (\hat{w}_i - \overline{w})(\hat{A}_i - \overline{A}) + \left(1 - \sum_{i=1}^{N} \sigma_i\right)(\hat{w}_e - \overline{w})(\hat{A}_e - \overline{A}) ,$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \sigma_i (\hat{w}_i - \hat{w}_e)(\hat{A}_i - \hat{A}_e) + \left(\sum_{i=1}^{N} \sigma_i (\hat{w}_i - \hat{w}_e)\right)\left(\sum_{i=1}^{N} \sigma_i (\hat{A}_i - \hat{A}_e)\right)$$

dargestellt werden, wobei N die Anzahl der auf der großräumigen Fläche F existierenden Wolkenelemente ist, deren Aufwindschlote die Querschnittsfläche S_i und den relativen Flächenanteil $\sigma_i = S_i/F$ haben. Die mittlere Flächenbedeckung an Aufwindschloten ist $\sigma = \sum_{i=1}^{N} \sigma_i = \frac{1}{F} \sum_{i=1}^{N} S_i$. $\hat{A}_i$ und $\hat{A}_e$ beschreiben typische Werte von $A = \{ w, T, q \}$ in den Aufwindschloten bzw. deren gemeinsamer Umgebung.

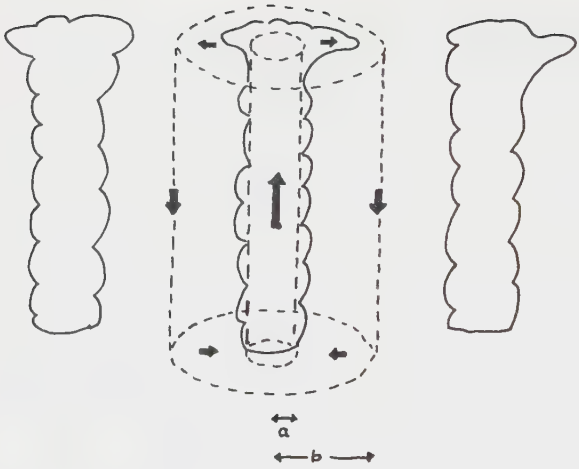
Um dieses Konzept eines konvektiven Wolkenfeldes zu realisieren, müssen $\hat{A}_i$, $\hat{A}_e$, $\hat{w}_i$, $\hat{w}_e$ und σ_i ermittelt werden. Eine Berechnung der A- und w-Werte kann direkt durch Integration der Konvektionsgleichungen erfolgen. Zur Bestimmung der σ-Werte wurden zwei verschiedene Wege eingeschlagen:

1. Von KUO (1965) wurde eine bilanzierende Methode entwickelt. Bei vorgegebener Wolkenober- und -untergrenze ergibt sich aus den Temperatur- und Feuchtedifferenzen zwischen der Wolkenadiabaten und der großräumigen Schichtung sowie der Wärme- und Wasserdampfzufuhr durch Konvergenz und Aufnahme vom Boden eine Zuwachsrate an Wolkenelementen $\Delta\sigma/\Delta t$, die durch Wahl eines 'geeigneten' Zeitscales Δt in Bedeckungsgrade σ umgesetzt werden kann.
   Die Schwächen dieses Ansatzes sind die ungenaue Definition des Zeitscales Δt als halbe oder volle mittlere Lebensdauer einer Konvektionszelle und der Verzicht auf die Simulierung des eigentlichen Konvektionsvorgangs mit feuchtem Aufsteigen und Kondensation innerhalb der Wolke und trockenem Absinken in ihrer Umgebung.
2. Dieser zuletzt genannte Prozeß wird im Modell von KASAHARA und ASAI (1967) explizit beschrieben, indem die über den Aufwindschlot und seine Umgebung gemittelten Konvektionsgleichungen (σ - Flächenmittlung) numerisch integriert werden. Der Übergang von der einzelnen Konvektionszelle zum Wolkenfeld wird durch Symmetrieannahmen vollzogen. Diese Symmetrieannahmen verlangen, daß auf jedem Einheitsfeld identische Wolken zu demselben Zeitpunkt erzeugt werden (siehe Abb. 1.2). Der wahrscheinlichste Bedeckungsgrad wird durch die σ - Werte definiert, bei denen eine maximale Produktion an kinetischer Energie bzw. ein maximaler vertikaler Transport an fühlbarer Wärme auftritt.

Durch die Simulierung der zeitlichen Entwicklungen von konvektiven Wolken legen KASAHARA und ASAI besonderes Gewicht auf die Mechanismen, die die Konvektion steuern und ihre Erscheinungsform bestimmen. Der von ihnen vorgeschlagene Ansatz kann daher als Basis einer Parametrisierung dienen, die die Physik der Konvektion erfassen will.

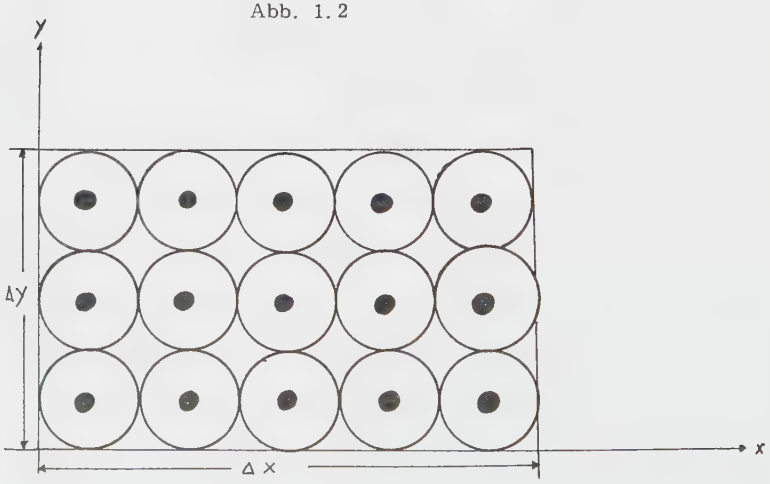
Dabei dürfen wir nicht übersehen, daß auch das KASAHARA - ASAIsche Modell noch einige sehr starke Vereinfachungen vornimmt:

1. Die bereits zitierte Symmetrieannahme läßt keine Wechselwirkung der Wolken untereinander zu. Ein reales Wolkenfeld enthält Wolken, die sich zu festem Zeitpunkt in verschiedenen Entwicklungsphasen befinden und miteinander wechselwirken. Nur durch die Möglichkeit der gegenseitigen Beeinflussung der konvektiven Elemente kann ein Auswahl-



Säulenmodell einer Cumulus - Wolke nach KASAHARA und ASAI

Abb. 1.2



Idealisierte räumliche Verteilung der konvektiven Elemente in der large - scale Mittelungsfläche $\Delta x \, \Delta y$ (nach KASAHARA und ASAI).

prinzip operativ verwirklicht werden.

2. Es fällt kein Niederschlag aus den Modellwolken, sodaß keine Realisierung des durch die Kondensation von Wasserdampf erreichten Wärmegewinns stattfindet. Die Randbedingungen verhindern eine Wärme- und Feuchteaufnahme vom Boden.

Das Ziel dieser Arbeit ist es, diese Einschränkungen zu lockern (Symmetriebedingung) bzw. zu beseitigen (Niederschlagsausfall durch Parametrisierung der Mikrophysik). Ausgehend von dieser Erweiterung des KASAHARA - ASAIschen Modells muß die Frage nach dem wahrscheinlichsten Bedeckungsgrad neu diskutiert werden.

2. DAS GLEICHUNGSSYSTEM

Die σ - flächengemittelten Gleichungen werden aus dem thermo-hydrodynamischen System in der anelastischen Approximation abgeleitet. Dabei haben alle Gleichungen die folgende Grundform:

$$\frac{\partial \rho A}{\partial t} + \nabla_h \cdot \rho v_h A + \frac{\partial \rho w A}{\partial z} = \rho B - \nabla \cdot \tau_A \,, \tag{3}$$

wobei

	Variable	Gleichung
(4) $A =$	1	Kontinuitätsgleichung für trockene Luft,
	w	dritte Bewegungsgleichung,
	T	1. Hauptsatz der Thermodynamik,
	q_d	Kontinuitätsgleichung für Wasserdampf,
	q_f	Kontinuitätsgleichung für flüssiges Wasser.

Die entsprechende Antriebsfunktion B lautet dann:

$$B = \begin{cases} 0 \\ g\left(\dfrac{T_v - \bar{T}_v}{\bar{T}_v} - q_f\right) \\ -w\left(\dfrac{g}{c_p} + \dfrac{L}{c_p}\right)\Phi_K \\ -\Phi_K \\ \Phi_K + \dfrac{\partial M_f}{\partial z} \end{cases} \tag{5}$$

wobei

Φ_K die Kondensationsrate darstellt und

M_f den mittleren Impuls der Relativbewegung der Regentropfen beschreibt.

$\bar{A}$ ist das Mittel von A über die horizontale Gesamtfläche F.

Der turbulente Transport τ_A soll keinen Einfluß auf die großräumigen Mittelwerte haben:

$$\tau_A = - \mathbb{K}_A \cdot \nabla \rho \, (A - \bar{A}) \,. \tag{6}$$

Bei der Flächenmittelung wird von der LEIBNIZschen Regel

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\int_{S_i} A \, df\right] = A_{Ri} \frac{\partial S_i}{\partial \xi} + \int_{S_i} \frac{\partial A}{\partial \xi} \, df \tag{7}$$

S_i = Wolkenfläche

und der Mittelwertdefinition

$$\int_{S_i} A\,df = A_i S_i \,, \qquad A_i = \frac{1}{S_i} \int_{S_i} A\,df \tag{8}$$

Gebrauch gemacht. Das Integral über die horizontalen Divergenzen liefert

$$\int_{S_i} \nabla_h \cdot \rho v_h A\,df = L_i \rho_{Ri} u_{Ri} A_{Ri} \,, \tag{9}$$

wenn angenommen wird, daß die Werte der Normalkomponente der Geschwindigkeit u_{Ri} sowie ρ_{Ri} und A_{Ri} auf dem Rand der Fläche i mit der Länge L_i konstant sind. Damit läßt sich die Gleichung (3) in die Form:

$$\frac{\partial (\rho A)_i S_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\{(\rho w A)_i S_i\} + \\ + \rho_{Ri} A_{Ri} \left\{u_{Ri} L_i - \frac{\partial S_i}{\partial t} - w_{Ri} \frac{\partial S_i}{\partial z}\right\} = (\rho B)_i S_i - (\nabla \cdot \tau_A)_i S_i \tag{10}$$

überführen. In

$$E_i = - \left\{u_{Ri} L_i - \frac{\partial S_i}{\partial t} - w_{Ri} \frac{\partial S_i}{\partial z}\right\} \tag{11}$$

sind alle Randeffekte zusammengefaßt. Die Funktion E_i wird als Entrainmentfunktion bezeichnet. Sie steuert über das Ein- und Ausströmen von Masse ($\rho_{Ri} u_{Ri}$) sowie über Flächenänderungen in Raum und Zeit den Massenhaushalt der σ-flächengemittelten konvektiven Modellwolke. Die Art der Parametrisierung dieser Prozesse wird im Abschnitt 2.1 diskutiert.
Durch die Einführung eines baryzentrischen Mittels

$$\hat{A}_i = \frac{(\rho A)_i}{\rho_i} \,, \qquad A_i'' = A - \hat{A}_i \,, \qquad (\rho A_i'')_i = o \tag{12}$$

läßt sich Gleichung (10) in der folgenden Form schreiben:

$$\frac{\partial \rho_i \hat{A}_i S_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho_i \hat{w}_i \hat{A}_i S_i}{\partial z} - \\ - \rho_{Ri} A_{Ri} E_i = \rho_i \hat{B}_i S_i - (\nabla \cdot \tau_A)_i S_i - \frac{\partial}{\partial z}\{(\rho w_i'' A_i'')_i S_i\} \,. \tag{13}$$

Daraus folgt unmittelbar die Kontinuitätsgleichung für trockene Luft (A = 1, B = o):

$$\frac{\partial \rho_i S_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho_i \hat{w}_i S_i}{\partial z} - \rho_{Ri} E_i = o \,. \tag{14}$$

Von nun an wollen wir die horizontale Dichteänderung vernachlässigen:

$$\tilde{\rho} = \rho_i = \rho_{Ri} = \rho_e = \rho\,(z) \,.$$

Dann erhalten wir den folgenden Satz von Grundgleichungen in advektiver Form:

$$(14a)\quad \frac{\partial S_i}{\partial t} + \hat{w}_i \frac{\partial S_i}{\partial z} + \frac{S_i}{\rho} \frac{\partial \rho \hat{w}_i}{\partial z} - E_i = o$$

$$(15)\quad \frac{\partial \hat{w}_i}{\partial t} + \hat{w}_i \frac{\partial \hat{w}_i}{\partial z} + \frac{E_i}{S_i}(\hat{w}_i - w_{Ri}) = g\left(\frac{\hat{T}_{\nu i} - \overline{T}_\nu}{\overline{T}_\nu} - \hat{q}_{fi}\right) - D_i(w)\ ,$$

$$(16)\quad \frac{\partial \hat{T}_i}{\partial t} + \hat{w}_i\left(\frac{\partial \hat{T}_i}{\partial z} + \frac{g}{c_p}\right) + \frac{E_i}{S_i}(\hat{T}_i - T_{Ri}) = \frac{L}{c_p}\hat{\Phi}_{Ki} - D_i(T)\ ,$$

$$(17)\quad \frac{\partial \hat{q}_{di}}{\partial t} + \hat{w}_i \frac{\partial \hat{q}_{di}}{\partial z} + \frac{E_i}{S_i}(\hat{q}_{di} - q_{dRi}) = -\hat{\Phi}_{Ki} - D_i(q_d)\ ,$$

$$(18)\quad \frac{\partial \hat{q}_{fi}}{\partial t} + \hat{w}_i \frac{\partial \hat{q}_{fi}}{\partial z} + \frac{E_i}{S_i}(\hat{q}_{fi} - q_{fRi}) = \hat{\Phi}_{Ki} - \left(\frac{\partial M_f}{\partial z}\right)_i - D_i(q_f)\ ,$$

wobei in

$$(19)\quad D_i(A) = \frac{1}{\rho}(\nabla \cdot \tau_A)_i + \frac{1}{\rho S_i}\frac{\partial}{\partial z}\{(\rho w_i'' A_i'')_i S_i\}$$

Diffusions- und Korrelationsterme zusammengefaßt werden.

Wir wollen nun annehmen, daß sich auf der Gesamtfläche F N einzelne Wolkenelemente befinden. Die Fläche S_e der allen Wolkenelementen gemeinsamen Umgebung beträgt dann:

$$(2o)\quad S_e = F - \sum_{i=1}^{N} S_i\ .$$

Das Gleichungssystem für die Umgebung unterscheidet sich nur in der Formulierung der Diffusions- und Entrainmentterme von dem für die Wolkenelemente.
Um zu der entgültigen Form des Gleichungssystems zu gelangen, wollen wir noch einige Vereinfachungen vornehmen.
Die in der Definitionsgleichung (6) ausgedrückte Eigenschaft für die mikroturbulenten Flüsse, nur Abweichungen vom Mittelwert zu berücksichtigen, verlangt:

$$(21)\quad \overline{D(A)} = \sum_{i=1}^{N} S_i D_i(A) + S_e D_e(A) = o\ .$$

Unter Wahrung dieser Eigenschaft soll

$$D_i(A) = \frac{K_{Ah} L_i}{S_i} \frac{\partial A}{\partial n}\Big|_{Ri} + \frac{K_{Az}}{\rho}\left\{\frac{\partial^2 \rho \hat{A}_i}{\partial z^2} + \frac{1}{S_i}\frac{\partial^2 S_i}{\partial z^2}\rho(\hat{A}_i - A_{Ri}) + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{S_i}\frac{\partial S_i}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z}[\rho(\hat{A}_i - A_{Ri})]\right\} - \frac{1}{\rho S_i}\frac{\partial}{\partial z}\{(\rho w_i'' A_i'')_i S_i\} \tag{22}$$

durch

$$D_i(A) = \frac{K_{Ah} L_i}{S_i}\frac{\partial A}{\partial n}\Big|_{Ri} + K_{Az}\frac{\partial^2 \hat{A}_i}{\partial z^2}$$

$$D_e(A) = -\frac{1}{S_e}\sum_{i=1}^{N} S_i D_i(A) \tag{23}$$

approximiert werden, wodurch zwar der Effekt der vertikalen Flächenänderung entfällt, das mittelwertneutrale Verhalten jedoch gewahrt bleibt.
Da die Gesamtfläche F, auf die sich die large-scale-Mittelung bezieht, sich zeitlich nicht ändert, kann aus den Flächengleichungen (14a) und der formal identischen Flächengleichung für die Umgebung:

$$\rho\frac{\partial S_e}{\partial t} + \frac{\partial \rho \hat{w}_e S_e}{\partial z} - \rho E_e = o \tag{24}$$

die Entrainmentfunktion der Umgebung

$$E_e = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial z}\{\rho\sum_{i=1}^{N}\hat{w}_i S_i + \hat{w}_e S_e\} - \sum_{i=1}^{N} E_i$$

$$= \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial z}\{\rho \bar{w} F\} - \sum_{i=1}^{N} E_i = E_F - \sum_{i=1}^{N} E_i \tag{25}$$

bestimmt werden. $E_F = \frac{F}{\rho}\frac{\partial \rho \bar{w}}{\partial z}$ beschreibt in dieser Gleichung den Massengewinn oder -verlust, den large-scale-Konvergenzen und Divergenzen verursachen.
Mit A_F bezeichnen wir die Werte von A auf dem Rand der Gesamtfläche F, die entlang dieses Randes nicht variieren sollen.

Das Gleichungssystem für die Variablen der Umgebung lautet dann:

$$\frac{\partial \hat{w}_e}{\partial t} = -\hat{w}_e\frac{\partial \hat{w}_e}{\partial z} + \frac{E_F}{S_e}(w_F - \hat{w}_e) - \frac{1}{S_e}\sum_i E_i(w_{Ri} - \hat{w}_e) +$$

$$+ \frac{g}{\bar{T}_\nu}(\hat{T}_{\nu e} - \bar{T}_\nu) - g\hat{q}_{fe} + \frac{1}{S_e}\sum_i S_i D_i(w)\ , \tag{26}$$

$$(27)\quad \frac{\partial \hat{T}_e}{\partial t} = -\hat{w}_e\left(\frac{\partial \hat{T}_e}{\partial z}+\frac{g}{c_p}\right)+\frac{E_F}{S_e}(T_F-\hat{T}_e)-\frac{1}{S_e}\sum_i E_i(T_{Ri}-\hat{T}_e)+$$

$$+\frac{L}{c_p}\hat{\Phi}_{Ke}+\frac{1}{S_e}\sum_i S_i D_i(T)\ ,$$

$$(28)\quad \frac{\partial \hat{q}_{de}}{\partial t} = -\hat{w}_e\frac{\partial \hat{q}_{de}}{\partial z}+\frac{E_F}{S_e}(q_{dF}-\hat{q}_{de})-\frac{1}{S_e}\sum_i E_i(q_{dRi}-\hat{q}_{de})-$$

$$-\hat{\Phi}_{Ke}+\frac{1}{S_e}\sum_i S_i D_i(q_d)\ ,$$

$$(29)\quad \frac{\partial \hat{q}_{fe}}{\partial t} = -\hat{w}_e\frac{\partial \hat{q}_{fe}}{\partial z}+\frac{E_F}{S_e}(q_{fF}-\hat{q}_{fe})-\frac{1}{S_e}\sum_i E_i(q_{fRi}-\hat{q}_{fe})+$$

$$+\hat{\Phi}_{Ke}-\left(\frac{\partial M_f}{\partial z}\right)_e+\frac{1}{S_e}\sum_i S_i D_i(q_f)\ .$$

Die Gleichung (26) für w_e wollen wir ersetzen durch

$$F\bar{w}=\sum_i S_i\hat{w}_i+S_e\hat{w}_e\ ,$$

$$(3o)\quad \hat{w}_e=\frac{\bar{w}-\sum_i \sigma_i\hat{w}_i}{1-\sum_i\sigma_i}\ ,\qquad \sigma_i=\frac{S_i}{F}\ ;$$

d.h. die mittlere Vertikalgeschwindigkeit soll sich zeitlich nicht ändern. Diese Annahme ist insofern vernünftig, als wir von der Verwendung der dritten Bewegungsgleichung im large-scale keine realistischen Ergebnisse erwarten können. Wegen der vorgegebenen Modellstruktur ist keine Berechnung einer balancierten Vertikalgeschwindigkeit möglich.

2.1 Entrainment.

Als wichtigstes Bindeglied im Wolkensystem erweist sich das Entrainment:

$$E_i=\frac{\partial S_i}{\partial t}+w_{Ri}\frac{\partial S_i}{\partial z}-u_{Ri}L_i\ .$$

1. Es steuert den Massenaustausch durch die seitlichen Ränder der Wolkenelemente und damit auch den Austausch von Impuls, Wärme und Wasserdampf.
2. Es beschleunigt oder verzögert dadurch die Entwicklung der einzelnen Wolke.
3. Auf zwei Wegen werden über das Entrainment die Umgebungsparameter verändert:

a) Durch den direkten Austausch am Wolkenrand.
b) Je größer die Vertikalgeschwindigkeit im Wolkenelement ist, desto größer ist auch die Vertikalgeschwindigkeit in der Umgebung und desto größer auch die dadurch bewirkte Advektion.

4. Da die derart durch die Entrainmentwirkungen beeinflußte Umgebung für alle Wolkenelemente identisch ist, wird über das Entrainment eine Wechselwirkung zwischen den einzelnen Wolken ausgeübt.

Zur Diskussion der verschiedenen Parametrisierungsansätze betrachten wir die Kontinuitätsgleichung für trockene Luft:

$$\frac{\partial S_i}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial \rho\, \hat{w}_i S_i}{\partial z} + E_i \,. \tag{31}$$

Ausgehend von dieser Gleichung können wir zwei Grenzfälle für das Entrainment formulieren:

1. Minimales Entrainment
   $E_{min} = o$, d.h. kein Massenfluß durch die seitlichen Ränder und kein Austausch mit der Umgebung.

2. Maximales Entrainment
   $E_{Max} = (S_i/\rho)(\partial \rho\, w_i/\partial z)$, d.h. die Massenzu- bzw. abflüsse durch die Ränder der Wolkenelemente sind gerade so stark, daß die Flächen S_i konstant bleiben.

Fast alle anderen Ansätze liegen zwischen diesen beiden Grenzfällen. Wir können sie folgendermaßen beschreiben. Auf Grund des höheren Turbulenzgrades im Inneren der Wolke nimmt diese relativ an Masse zu. Dieser Sachverhalt ist durch Laborexperimente von ROUSE und DODU (1955) bestätigt worden.
Der einfachste Ansatz lautet:

$$E_i = \frac{\alpha}{R_i}\, 2 S_i \,|\hat{w}_i| \,, \tag{32}$$

wobei α die sogenannte Entrainmentkonstante ist und R_i der Radius der als kreisförmig angenommenen Konvektionszelle. Diese Form der Entrainmentfunktion, die bei der Simulierung von eindimensionalen Wolken fast ausschließlich verwandt worden ist (siehe z.B. WEINSTEIN (1969), TAKEDA (1966)), zeichnet sich dadurch aus, daß E_i stets positiv ist, was einen absoluten Massengewinn für die Wolke bedeutet.
Das normale Zirkulationsschema einer Konvektionszelle mit Einströmen im unteren Teil und Ausströmen im oberen Teil legt es nahe, den Ansatz (32) mit der Maximum-Entrainment-Annahme zu verbinden. Der Ansatz

$$E_i = 2\,\frac{S_i}{R_i}\,\alpha\,|\hat{w}_i|\; f\left(\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial \rho\, \hat{w}_i}{\partial z}\right), \tag{33}$$

wobei die Funktion f(x) dasselbe Vorzeichen hat wie sign(x), weist bei geeigneter Normierung das folgende Verhalten auf:

Bei Konvergenz: $|\hat{w}_i|\ \mathrm{sign}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho \hat{w}_i}{\partial z}\right) > o$ ist $E_{min} < E_i < E_{max}$.
Die Wolke gewinnt an Masse, jedoch nicht soviel wie bei maximalem Entrainment mit konstantem Radius möglich wäre.

Ist $|\hat{w}_i|\ \mathrm{sign}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho \hat{w}_i}{\partial z}\right) < o$ so liegt Ausströmen vor und es gilt $E_{max} < E_i < E_{min}$, d.h. der Massenverlust ist geringer als im maximalen Fall.

Diese beiden Bereiche können folgendermaßen zusammengefaßt werden:
Es liegt stets ein relativer Massengewinn vor; beim Einströmen relativ zum Zusammenziehen des Querschnitts auf Grund des vergrößerten Impulses, wie es E_{min} durch $S = S_o \frac{\rho_o w_o}{\rho w}$ verlangen würde, beim Ausströmen relativ zum Verlust, der bei konstant gehaltener Flächengröße eintreten würde.

Am einfachsten zu dokumentieren ist dieses Verhalten durch die Integration der stationären Kontinuitätsgleichung bei vorgegebenem Impulsprofil $\rho \hat{w}_i$:

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho S_i \hat{w}_i}{\partial z} + E_i = o \,. \tag{34}$$

Bei Kreisform der Wolkenelemente $S_i = \pi R_i^2$ und unter Fortlassen der Indizes $\hat{}$ und i gilt:

$$\frac{\partial R}{\partial z} + \frac{1}{2}\frac{1}{\rho w}\frac{\partial \rho w}{\partial z} R = \frac{E}{w}\frac{1}{2\pi R} = \frac{1}{w}\left\{\frac{\partial R}{\partial t} + w_R \frac{\partial R}{\partial z} - u_R\right\} \tag{35}$$

oder

$$\frac{\partial R}{\partial z} + P(z)\, R = Q(z) \tag{36}$$

mit

$$P(z) = \frac{1}{2}\frac{1}{\rho w}\frac{\partial \rho w}{\partial z}\,, \qquad Q(z) = \frac{E}{2\pi R w} = \frac{E'}{w}\,.$$

Daraus folgt die allgemeine Lösung

$$R(z) = e^{-\int P(z)\,dz}\left[C + \int Q(z')\, e^{\int P(z)\,dz}\, dz'\right] \tag{37}$$

$$= \sqrt{\frac{\rho_o w_o}{\rho w}}\left[R_o + \int \frac{E'}{w}\sqrt{\frac{\rho w}{\rho_o w_o}}\, dz\right].$$

Integriert werden nun die folgenden Entrainmentansätze:

1. $E \equiv o$ Minimum-Entrainment
2. $E = \frac{S}{\rho}\frac{\partial \rho w}{\partial z}$ Maximum-Entrainment

3. $E = 2\frac{S}{R}\frac{\alpha}{\rho}\rho w$ klassischer Ansatz

4. $E = 2\pi\alpha R\, w\, \mathrm{sign}\left(\frac{\partial \rho w}{\partial z}\right)$ erster Versuch einer Verknüpfung von 2. und 3.

5. $E = 2\pi\alpha R\, w\, \frac{1}{\rho\gamma_w}\frac{\partial \rho w}{\partial z}$ der in dieser Arbeit neben 2. verwendete Ansatz.

Die Lösungen der stationären Kontinuitätsgleichung (36) lauten dann:

1. $R(z) = \sqrt{\frac{\rho_o w_o}{\rho w}}\, R_o$ oder $\rho_o w_o S_o = \rho w S = \text{const}$,

2. $R(z) = R_o = \text{const}$,

3. $R(z) = \sqrt{\frac{\rho_o w_o}{\rho w}}\left[R_o + \int_o^z \alpha \sqrt{\frac{\rho w}{\rho_o w_o}}\, dz'\right]$,

4. $R(z) = \sqrt{\frac{\rho_o w_o}{\rho w}}\left[R_o + \int_o^z \alpha\, \mathrm{sign}\left(\frac{1}{\rho}\frac{d\rho w}{dz'}\right)\sqrt{\frac{\rho w}{\rho_o w_o}}\, dz'\right]$,

5. $R(z) = R(\rho w, \rho_o w_o) = \sqrt{\frac{\rho_o w_o}{\rho w}}\left[R_o + \frac{2\alpha}{3\gamma_w \rho_o}\left(\sqrt{\frac{(\rho w)^3}{\rho_o w_o}} - \rho_o w_o\right)\right]$.

Alle Lösungen mit Ausnahme von 2. verbindet eine unvorteilhafte Eigenschaft, daß für $w \to o$ $R(z)$ gegen unendlich geht. Durch Korrekturfaktoren an den Entrainmentfunktionen, die diese selbst für $w \to o$ gegen unendlich gehen lassen, ist diese Flächendivergenz zu verhindern; doch ist kein physikalischer Grund zu sehen, der diese Manipulation rechtfertigen würde.

Der Punkt $w = o$ ist aber auch in der stationären Form anderer Gleichungen z.B. der dritten Bewegungsgleichung ausgezeichnet, die ohne Entrainment und Reibung die Form

$$\frac{1}{2}\frac{\partial w^2}{\partial z} = g\left(\frac{T_\nu - \overline{T}_\nu}{\overline{T}_\nu} - q_f\right) \qquad (38)$$

hat. Da eine Integration der Gleichung (37) über den Punkt $w = o$ hinweg nicht möglich ist, wurden alle bisherigen Integrationen von stationären eindimensionalen Modellen auf den Bereich $w > o$ beschränkt (z.B. HALTINER (1959), SQUIRES und TURNER (1962)). Wie WEINSTEIN (1969) gezeigt hat, bestehen diese Probleme bei der numerischen Integration des instationären Systems nicht.

Um die Verhaltensweisen der verschiedenen Entrainment-Parametrisierungen im stationären Fall anschaulich zu machen, wurden die in Abb. 2.1 dargestellten Rechnungen durchgeführt. Die noch freie Normierungskonstante γ_w wurde so gewählt, daß die Maxima des Betrages von E für die Ansätze 3.

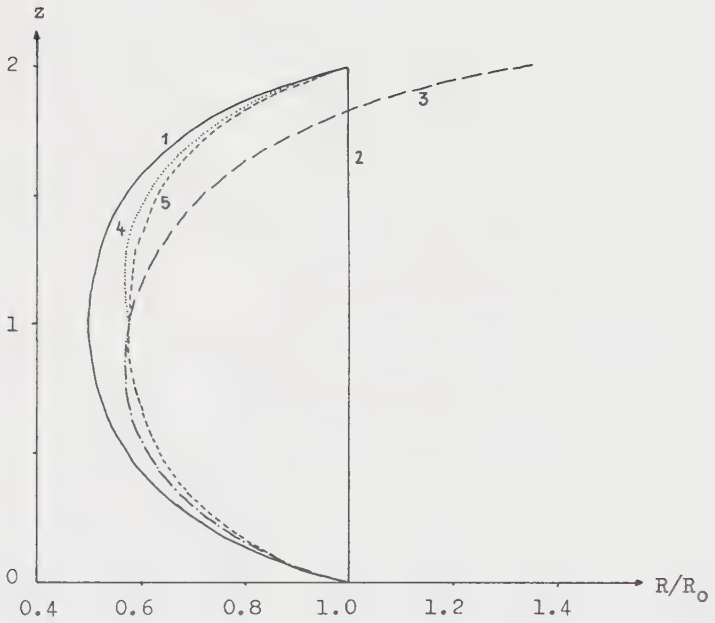


Abb. 2.1: Radius des konvektiven Elements bei stationärer Kontinuitätsgleichung und verschiedenen Entrainment - Parametrisierungen

$\alpha = 0.2$, $\gamma_w = C/2$

$w = \frac{C}{2}(2 - (z - 1)^2)$

bis 5. gleich waren. Der entrainmentfreie Fall 1. mit $\rho S w$ = const. weist naturgemäß den geringsten Radius auf, weil hier jeder Massenzufluß durch die seitlichen Ränder fehlt. Der klassische Ansatz 3. führt bzgl. ρw zu einem asymmetrischen Verhalten, was bei Vorzeichenwechsel für die Vertikalgeschwindigkeit (negativ im oberen Teil der Wolke) zu physikalischen und rechnerischen Komplikationen führt. Von den beiden aus dem Ansatz (33) hervorgegangenen Parametrisierungen 4. und 5. ist die letztere vorzuziehen; denn die Radiuskurve hat bei Verwendung von Ansatz 4. im Impulsextremum eine Knickstelle, die physikalisch sinnlos ist. Den entgültigen Ausschlag für die Verwendung von

$$E_i = 2\pi\alpha R_i \, |\hat{w}_i| \, \frac{1}{\rho\gamma_w} \, \frac{\partial \rho \hat{w}_i}{\partial z}$$

ergab sich daraus, daß E_i in dieser Form nach Gleichung (38) proportional zu

$$g\left(\frac{\hat{T}_{\nu i} - \bar{T}_\nu}{\bar{T}_\nu} - \hat{q}_{fi}\right) \tag{38a}$$

ist und damit neben dynamischen auch thermische Aspekte berücksichtigt.

Da in allen Grundgleichungen in advektiver Form die Entrainmentfunktion mit der Differenz von Flächenmittelwert und Randwert multipliziert werden muß, gehört die Definition der Randwerte (Index Ri) zu dieser Diskussion über die Parametrisierung des Entrainment.

Die bei diesen Rechnungen verwandte Definition der Randwerte

$$A_{Ri} = \frac{1}{2}\,(\hat{A}_i + \hat{A}_e)\,, \qquad A_F = \hat{A}_e \tag{39}$$

soll mit den in anderen Arbeiten vorgenommenen Festsetzungen verglichen werden.
Die Terme

$$+\frac{E_i}{S_i}\,(\hat{A}_i - A_{Ri}) \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{S_e}\sum_{i=1}^{N} E_i\,(A_{Ri} - \hat{A}_e) \tag{40}$$

vertreten im eindimensionalen Modell die horizontale Advektion $v_h \cdot \nabla_h A$ bzw. $u\,\partial A/\partial r$ der drei- bzw. zweidimensionalen Formulierung. Geht man vom zweidimensionalen zylindersymmetrischen Modell aus, so ist bei vorgegebenem Radius r und stationärer Kontinuitätsgleichung (anelastische Approximation):

$$u(r) = -\frac{1}{\rho}\frac{1}{r}\int_o^r r'\,\frac{\partial \rho w}{\partial z}\,dr' \tag{41}$$

u(r) proportional zum Mittelwert von $-\,r\,\partial\rho w/\partial z$,

d.h. $\quad u(r) < o \quad$ bei $\quad +\int_o^r r'\,\frac{\partial \rho w}{\partial z}\,dr' > o$ Einströmen ,

$\qquad\qquad u(r) > o \quad$ bei $\quad \int_o^r r'\,\frac{\partial \rho w}{\partial z}\,dr' < o$ Ausströmen.

Dieselbe Eigenschaft weist auch $E_i/\sqrt{S_i}$ in den Entrainmentformulierungen 2., 4. und 5. auf
Wenn wir uns vorerst auf ein einziges konvektives Element mit Umgebung beschränken (N = 1), so gehen die Terme (4o) in

$$\frac{E_i}{\sqrt{S_i}}\,\frac{1}{2\sqrt{S_i}}\,(\hat{A}_i - \hat{A}_e) \quad \text{bzw.} \quad \frac{E_i}{\sqrt{S_i}}\,\frac{S_i}{S_e}\,\frac{1}{2\sqrt{S_i}}\,(\hat{A}_i - \hat{A}_e) \tag{42}$$

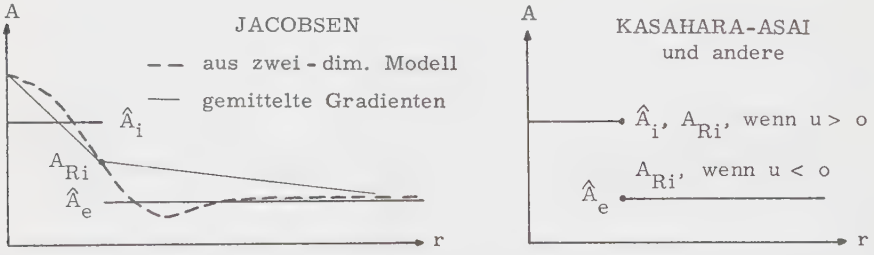
über.
Wenn $E_i/\sqrt{S_i}$ als 'Einströmgeschwindigkeit' definiert wird, vertreten

$$\frac{1}{2\sqrt{S_i}}\,(\hat{A}_i - \hat{A}_e) \quad \text{bzw.} \quad \frac{S_i}{S_e}\,\frac{1}{2\sqrt{S_i}}\,(\hat{A}_i - \hat{A}_e)$$

die 'Normalableitungen' am Wolkenrand, die bis auf den Faktor des Flächenverhältnisses S_i/S_e für Wolke und Umgebung gleich sind. Diese Formulierung von Entrainment und Randwerten hat zur Folge, daß sich sowohl die Variablen der Wolke i als auch die der Umgebung durch den Massenaustausch ändern, wenn $\hat{A}_i \neq \hat{A}_e$ und $E_i \neq o$ sind.
Durch ihre Randwertdefinition

(39a)
$$A_{Ri} = \begin{cases} \hat{A}_i\,, & u(Ri) > o \\ \hat{A}_e\,, & u(Ri) < o \end{cases}$$

erreichen KASAHARA und ASAJ (1967), daß nur der Bereich, in den die Masse einströmt (Wolke i bei $u(r) < o$, Umgebung bei $u(r) > o$), durch das Entrainment modifiziert wird. Voraussetzung für die Randwertformulierung (39a), die bisher in allen eindimensionalen Wolkenmodellen verwandt worden ist, ist das 'top-hat'-Profil, das die horizontalen Gradienten außer am Wolkenrand selbst vernachlässigt:



In zweidimensionalen Wolkenmodellen spielen diese horizontalen Gradienten eine wesentliche Rolle für die Entwicklung der Konvektionszelle. Flugzeugmessungen zeigen ein etwas uneinheitliches Bild (siehe z.B. TELFORD und WARNER (1962) oder KOENIG (1963)), das aber eher die 'top-hat'-Annahme favorisiert.

Da die Gleichungen für die Flächen der konvektiven Elemente S_i aus der Kontinuitätsgleichung hervorgegangen sind, sind sie bei der numerischen Integration am kompliziertesten zu handhaben. Daher wird oft von ihrer Integration abgesehen (z.B. bei WEINSTEIN (1969)) und S_i = const gesetzt, obwohl dies die Bilanzen über das Gesamtvolumen bei Verwendung der Entrainment-Parametrisierungen 3. bis 5. verfälscht.
Wenn wir eine dieser Entrainmentformulierungen bei konstanter Fläche benutzen und gleichzeitig die Randwertdefinitionen (39) in die Grundgleichungen (15) bis (18) sowie (26) bis (29) einsetzen, so definieren wir bzgl. der hierfür exakten Entrainment-Parametrisierung 2. zwei unterschiedliche Rand-

werte:
einen für den inneren Rand der Wolke:

$$A_{Ri-} = \hat{A}_i(1 - \tilde{E}_i) + \hat{A}_e\tilde{E}_i$$

und einen für den äußeren Rand der Wolke:

$$A_{Ri+} = \hat{A}_i\tilde{E}_i + (1 - \tilde{E}_i)\hat{A}_e ,$$

wobei $$\tilde{E}_i = \frac{E_i}{2S_i}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho \hat{w}_i}{\partial z}\right)^{-1}$$ ist.

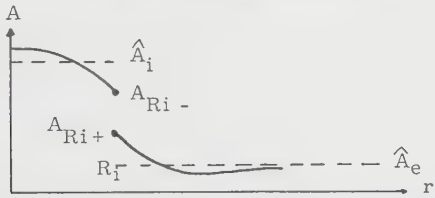
Wenn wir die Parameter α und γ_w so wählen, daß

$$\tilde{E}_i \leq \frac{1}{2}$$

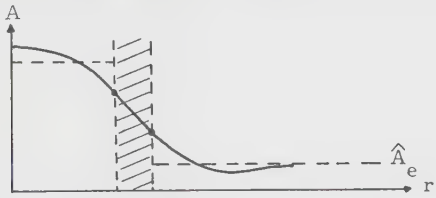
gilt, erhalten wir den folgenden Sachverhalt:
Sei o.B.d.A. $$\hat{A}_i > \hat{A}_e ,$$

so ist $$A_{Ri-} \geq \frac{1}{2}(\hat{A}_i + \hat{A}_e) \geq A_{Ri+} .$$

Die graphische Darstellung dieses Falles



kann durch Entzerrung und die Definition einer 'Randzone' in



überführt werden, wobei die Dicke dieser 'Randzone' gegen Null geht, wenn $\tilde{E}_i = 0.5$ wird. Die Randzone ist am dünnsten, wo $|\hat{w}_i|$ maximal wird, d.h. der so konstruierte 'Rand' ist am schärfsten ausgeprägt in der Mitte der Wolke und zerfließt in den Bereichen kleiner Vertikalgeschwindigkeiten.

2.2 Einarbeitung der Mikrophysik.

In den Grundgleichungen steht bislang nur das Symbol für Kondensation und Evaporation Φ_K sowie $\partial M_f/\partial z$ für den Regenwasserausfall. Da wir an Hand der Niederschlagsmenge das Auswahlschema von KASAHARA und ASAI (1967) überprüfen wollen, ist es notwendig, eine geeignet parametrisierte Mikrophysik in das Modell einzubauen. Ein Schema dafür ist ausgehend von der MARSHAL - PALMER - Verteilung für das Regentropfenspektrum (1948)

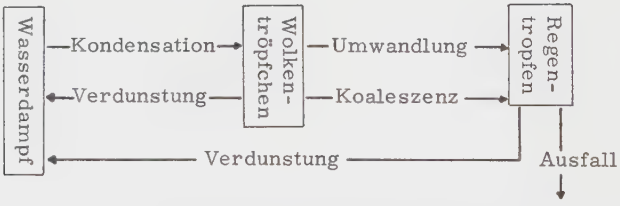
(43) $$f(d) = N_o e^{-\lambda d}, \qquad d = \text{Tropfendurchmesser}$$

und der Formel für die Endgeschwindigkeit der Regentropfen von SPILHAUS (1948)

(44) $$V(d) = V_o d^{1/2}$$

entwickelt worden.

Nach KESSLER (1969) wird unterschieden zwischen Wolkentröpfchen ohne Fallgeschwindigkeit und Regentropfen, die nach dem folgenden Schema mit einander wechselwirken:



Am einfachsten zu beschreiben in diesem Schema ist die Balance zwischen Wasserdampf und Wolkentröpfchen. Wir verlangen, daß sämtlicher Wasserdampf, der die Sättigungsfeuchte überschreitet $q_d - q_d^*(T)$ sofort zu Wolkentröpfchen kondensiert bzw. alle Wolkentröpfchen bei Untersättigung sofort verdunsten.

Die Umwandlung von Wolkentröpfchen in Regentropfen soll einsetzen, wenn ein erster Grenzwert der Wolkentröpfchendichte a überschritten wird und dann mit der Umwandlungsrate K_1 (Dimension sec^{-1}) fortschreiten:

(45) $$\text{Conv} = K_1 (q_c - a) = K_1 (\rho_c/\rho - a),$$

wobei ρ_c die Dichte der Wolkentröpfchen ist und

$q_c = \rho_c/\rho$ ihre Konzentration.

Die Gravitationskoaleszenz, durch die Wolkentröpfchen von Regentropfen eingefangen werden, ist von der Fallgeschwindigkeit V der Regentropfen

abhängig; denn der Zylinder, den der Tropfen des Radius r pro Zeiteinheit durchfällt, hat das Volumen $\pi r^2 V$. Beträgt die Effizienz der Koaleszenz E, so ergibt sich für den Tropfen des Radius r eine Koaleszenzrate von

$$\text{Coll}(r) = \pi r^2 V E q_c ,$$

woraus für das MARSHAL - PALMERverteilte Gesamtspektrum

$$\text{Coll} = \int_0^\infty \text{Coll}(d)\, f(d)\, dd = \frac{V_o \pi}{4} E q_c \frac{\Gamma(3.5)}{\lambda^{3.5}} \tag{46}$$

folgt.

Bei der Parametrisierung der Verdunstung der Regentropfen gehen wir davon aus, daß ein fallender Tropfen nach dem Gesetz

$$\frac{\delta M(r)}{\delta t} = -[4\pi r(1 + F^* r)][K_d(\rho_d^* - \rho_d)] \tag{47}$$

an Masse verliert, wobei F^* ein Ventilationsfaktor, K_d ein Diffusionskoeffizient und ρ_d^* die Sättigungsdampfdichte sind. Die Approximationen

$$4\pi r(1 + F^* r) = F_o d^{1.6} \quad \text{und}$$

$$K_d(\rho_d^* - \rho_d) = A_d(q_d^* - q_d) ,$$

in denen F_o und A_d Konstante sind, weisen nach KESSLER (1969) eine Fehlerbreite von ± 2o % bzw. ± 25 % auf.
Die Integration von Gleichung (47) liefert unter Verwendung der Approximationen (48) die Evaporationsrate

$$\text{Evap} = F_o A_d(q_d^* - q_d) \int_0^\infty d^{1.6} f(d)\, dd = F_o N_o A_d(q_d^* - q_d) \frac{\Gamma(2.6)}{\lambda^{2.6}} . \tag{49}$$

Mit Hilfe der Regentropfendichte ρ_P läßt sich der MARSHAL - PALMER - Parameter λ aus den Gleichungen für die Gravitationskoaleszenz (Coll), die Verdunstung der Regentropfen (Evap) und die mittlere Fallgeschwindigkeit

$$V = \frac{\int_0^\infty V(d)\, \rho_w \frac{\pi d^3}{6} f(d)\, dd}{\int_0^\infty \rho_w \frac{\pi d^3}{6} f(d)\, dd} \tag{50}$$

$$= V_o \frac{\Gamma(4.5)}{\Gamma(4)} \frac{\lambda^4}{\lambda^{4.5}} = V_o \frac{\Gamma(4.5)}{\Gamma(4)} \lambda^{-1/2}$$

eliminieren:

$$\rho_P = \int_o^\infty \rho_w \frac{\pi d^3}{6} f(d)\, dd = \frac{\pi \rho_w}{6} N_o \frac{\Gamma(4)}{\lambda^4} ,$$

(51)

$$\lambda = \sqrt[4]{\rho_w \pi N_o} \, (\rho q_p)^{-1/4}$$

($\rho_w = 1o^6$ g/m^3 Wasserdichte).

Die Zahl der kleinsten Regentropfen (limes des Radius o) N_o, der Effizienzfaktor E und die Geschwindigkeit V_o müssen experimentell bestimmt werden bzw. die Proportionalitätsfaktoren K_1 bis K_4 in den Formeln:

$$\text{Conv} = K_1 (q_c - a) ,$$

$$\text{Coll} = K_2 q_c (\rho q_p)^{7/8} ,$$

$$\text{Evap} = K_3 (q_d^* - q_d) (\rho q_p)^{o.65} ,$$

$$V = K_4 (\rho q_p)^{1/8}$$

durch numerische Experimente.
Bei der Integration über die Fläche der Wolkenelemente wurde auf die von eins abweichenden Potenzen für ρq_p keine Rücksicht genommen, und bei der Berechnung des Niederschlags wurde in der numerischen Formulierung auf die Berücksichtigung der vertikalen Flächenänderungen verzichtet, d. h.

$$\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial M_f}{\partial z}\right)_i = \frac{1}{\rho S_i}\left\{S_i \frac{\partial}{\partial z}(\rho \hat{q}_{pi} \hat{V}_i) + \frac{\partial}{\partial z}\{(\rho q''_{pi} V''_i)_i S_i\} - \rho \frac{\partial S_i}{\partial z}\{q_{pRi} V_{Ri} - \hat{q}_{pi} \hat{V}_i\}\right\}$$

wurde unter den folgenden Annahmen

1. Fallgeschwindigkeit am Wolkenrand Null: $V_{Ri} = o$,
2. $(\rho q''_{pi} V''_i)_i = o$, Korrelationen verschwinden,
3. das Fallen der Regentropfen ist relevant nur auf einer effektiven Wolkenfläche, deren Querschnitt konstant ist (Dieser Querschnitt soll mit $S(z = o)$ übereinstimmen.),

durch

(53)

$$\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial M_f}{\partial z}\right)_i = \frac{S_o}{\rho S_i} \frac{\partial}{\partial z}(\rho \hat{q}_{pi} \hat{V}_i) = \frac{K_4}{\rho} \frac{\partial}{\partial z}(\rho \hat{q}_{pi})^{9/8} \frac{S_o}{S_i} = \frac{1}{\rho S_i} \frac{\partial M_{fi} S_i}{\partial z}$$

ersetzt.

Die Verwendung der 1oo %-Feuchtegrenze für Kondensation und Evaporation von Wolkentröpfchen empfiehlt, die Grundgleichungen neu zusammenzufassen in:

1. eine Gleichung für die Äqivalenttemperatur $\delta = T + L q_d / c_p$:

$$\frac{\partial \hat{\delta}_i}{\partial t} = - \hat{w}_i \left(\frac{\partial \hat{\delta}_i}{\partial z} + \frac{g}{c_p} \right) + \frac{E_i}{S_i} (\delta_{Ri} - \hat{\delta}_i) + D_i (\delta) , \tag{54}$$

2. eine Gleichung für die Summe von Wasserdampf und Wolkentröpfchen $m = q_d + q_c$:

$$\frac{\partial \hat{m}_i}{\partial t} = - \hat{w}_i \frac{\partial \hat{m}_i}{\partial z} + \frac{E_i}{S_i} (m_{Ri} - \hat{m}_i) + D_i (m) + \hat{E}vap_i - \hat{C}oll_i - \hat{C}onv_i , \tag{55}$$

3. eine Gleichung für die Regentropfen:

$$\frac{\partial \hat{q}_{pi}}{\partial t} = - \hat{w}_i \frac{\partial \hat{q}_{pi}}{\partial z} + \frac{E_i}{S_i} (q_{pRi} - \hat{q}_{pi}) + D_i (q_p) - \hat{E}vap_i + \hat{C}oll_i + \hat{C}onv_i + \frac{K_4}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} (\rho \hat{q}_{pi})^{9/8} \frac{S_o}{S_i} . \tag{56}$$

Aus $\hat{\delta}_i$ und $\hat{m}_i$ können nach der folgenden Methode wieder $\hat{T}_i$, $\hat{q}_{di}$ und $\hat{q}_{ci}$ gewonnen werden:

1. Keine Wolkentröpfchen vorhanden: $\hat{q}_{ci} = o$

$$\text{oder} \qquad q_d^* \left(\hat{\delta}_i - \frac{L}{c_p} \hat{m}_i \right) \geq \hat{m}_i$$

$$\Rightarrow \qquad \hat{T}_i = \hat{\delta}_i - L \hat{m}_i / c_p ,$$

$$\hat{q}_{di} = \hat{m}_i ,$$

$$\hat{q}_{ci} = o .$$

2. Wolkentröpfchen vorhanden: $\hat{q}_{ci} > o$

$$\text{oder} \qquad q_d^* \left(\hat{\delta}_i - \frac{L}{c_p} \hat{m}_i \right) < \hat{m}_i$$

durch Lösung der impliziten Gleichung

$$\hat{T}_i = \hat{\delta}_i - \frac{L}{c_p} q_d^* (\hat{T}_i)$$

mit Hilfe der Reihenentwicklung der Exponentialfunktion

$$q_d^* (\hat{T}_i) = q_d^* (\tilde{T}) \exp \left\{ \frac{L}{R_d} \frac{\hat{T}_i - \tilde{T}}{\tilde{T}^2} \right\}$$

bis zum quadratischen Glied, wobei bei der numerischen Prozedur als Referenztemperatur $\tilde{T}$ die Temperatur des vorangegangenen Zeitschrittes verwandt werden kann. Bei $\hat{T}_i - \tilde{T} = 1\,^{o}C$ beträgt der Fehler der Reihenentwicklung o.oo6 Prozent und nimmt mit kleiner werdenden Differenz $\hat{T}_i - \tilde{T}$ rasch ab.

2.3 Randbedingungen

Bei der Formulierung der Randbedingungen gehen wir davon aus, daß durch die Obergrenze des Modells (z = H) keine konvektiven Transporte hindurchgehen: $w(H) = \overline{w}(H)$ und an der Untergrenze die kinematische Randbedingung $w(o) = o$ gilt. Desgleichen fordern wir

$$T = \overline{T}(H) = \text{const}$$

$$q_d = \overline{q}_d(H) = \text{const}$$

$$\text{und} \quad q_f = o \qquad \text{für} \quad z = H\,.$$

An den seitlichen Berandungen hatten wir bereits durch $A_F = A_e$ sämtliche Einflüsse von außen abgefangen. Diese Annahme besagt, daß das betrachtete Konvektionsfeld von gleichartigen Feldern umgeben ist.

Mit Hilfe der unteren Randbedingung soll eine Wechselwirkung zwischen Boden und Atmosphäre beschrieben werden. Zu diesem Zweck wird eine Grenzschicht der Höhe h eingeführt, in der die Vertikalgeschwindigkeit w und das Entrainment identisch verschwinden sollen, sowie keine vertikalen Flächenänderungen vorhanden sind, woraus $S_i = \text{const}$ folgt.

Die Gleichungen für diese Grenzschicht haben die Form:

$$\frac{\partial \hat{T}_{i,e}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \hat{\varkappa}_{i,e}}{\partial z} - \frac{L}{c_p}\hat{E}vap_{i,e}\,, \tag{57}$$

$$\frac{\partial \hat{q}_{di,e}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \hat{\varepsilon}_{i,e}}{\partial z} + \hat{E}vap_{i,e}\,, \tag{58}$$

$$\frac{\partial \hat{q}_{fi,e}}{\partial t} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho\, \hat{q}_{pi,e}\, \hat{V}_{i,e}}{\partial z} - \hat{E}vap_{i,e}\,, \tag{59}$$

wobei

$$\varkappa = \begin{cases} -\rho K_T \dfrac{\partial \theta}{\partial z} & , \; z > o \\ \rho\, c_D U (T_B - T_{1o}) & , \; z = o \end{cases}$$

und

$$\varepsilon = \begin{cases} -\rho K_q \dfrac{\partial q_d}{\partial z} & , \; z > o \\ \rho\, c_D U (q_B - q_{d1o}) & , \; z = o \end{cases}$$

den vertikalen Wärme- und Feuchtestrom durch die Grenzfläche darstellen. Der Index 1o steht für den Wert in 1o m Höhe, der Index B für den Bodenwert. c_D ist der Reibungskoeffizient und U die Windgeschwindigkeit in 1o m Höhe. An dieser Stelle sind die mikroturbulenten Flüsse nicht als Abweichungen vom large-scale Mittelwert definiert, d.h. es kann eine Gesamterwärmung des Modellvolumens stattfinden. Die Ausgangsprofile für die Flächenmittelwerte der Temperatur und des Wasserdampfs werden jedoch so angepaßt, daß für t = o

$$\frac{\partial \hat{T}_{i,e}}{\partial t} = o \quad \text{und} \quad \frac{\partial \hat{q}_{di,e}}{\partial t} = o \tag{6o}$$

gelten. Änderungen von Temperatur und Feuchte auf Grund der so formulierten Randbedingungen sind daher auf die konvektive Aktivität zurückzuführen.

Über den mikroturbulenten Austausch, der oberhalb der Grenzschicht direkt auf die large-scale Mittelwerte wirkt, wird bis auf

$$\int_{h+}^{H} \frac{\partial \overline{\varkappa}}{\partial z}\, dz = o\,, \qquad \int_{h+}^{H} \frac{\partial \overline{\varepsilon}}{\partial z}\, dz = o$$

keine speziellen Annahmen gemacht.

2.4 Temperatur- und Feuchtebilanzgleichungen

Als Auswahlkriterium für die relative Wolkenbedeckung soll ein Maximalisierungskonzept dienen. Dazu ist es notwendig, die Bilanzen von Temperatur und Feuchte unter Einschluß der Transporte in der Grenzschicht und des Niederschlags zu berechnen.

Die Integration über die horizontale Modellfläche ist in unserem σ-Konzept identisch mit der Aufsummation über die einzelnen Wolkenflächen S_i ($i = 1, \ldots, N$) und die Umgebungsfläche S_e : $\frac{1}{F}\int_F A\, df = \sum_i \sigma_i \hat{A}_i + \sigma_e \hat{A}_e$.

Wegen der Bedingungen (21) und (24) fallen bei der Summation Diffusions- und Entrainmentterme in der freien Atmosphäre $z \in (h+, H)$ fort. Die Bilanzgleichungen lauten:

$$\int_{h+}^{H} \rho \Delta T\, dz = \frac{L}{c_p} \int_{h+}^{H} \int_{o}^{t^*} \overline{\Phi}_K\, dt\, dz - \int_{h+}^{H} \int_{o}^{t^*} \rho\, \overline{w} \left(\frac{\partial \hat{T}_e}{\partial z} + \frac{g}{c_p} \right) dt\, dz\,, \tag{61}$$

$$\int_{h+}^{H} \rho \Delta q_d dz = - \int_{h+}^{H} \int_{o}^{t^*} \overline{\Phi}_K\, dt\, dz - \int_{h+}^{H} \int_{o}^{t^*} \rho\, \overline{w}\, \frac{\partial \hat{q}_e}{\partial z}\, dt\, dz\,, \tag{62}$$

$$\int_{h+}^{H} \rho \Delta q_f dz = \int_{o}^{t^*} \left(\overline{M}_f(H) - \overline{M}_f(h+) \right) dt + \int_{h+}^{H} \int_{o}^{t^*} \overline{\Phi}_K\, dt\, dz\,, \tag{63}$$

wobei $\Delta A = \overline{A}(t^*) - \overline{A}(o)$

die Differenz von zwischen End- und Anfangszustand darstellt. Wenn wir die Zeit t^* so groß wählen, daß sich die Wolke bereits wieder aufgelöst hat, gilt $\Delta q_f \equiv o$, und da durch die Randbedingung $M_f(H) = o$ vorgeschrieben wurde:

$$\overline{\Psi}_+ := \int_{h+}^{H} \int_{o}^{t^*} \overline{\Phi}_K \, dt \, dz = \int_{o}^{t^*} \overline{M_f}(h+) \, dt =: \overline{\Phi}_+ = \text{Niederschlag.} \tag{64}$$

Ist q_f nicht in allen Schichten Null für $t = t^*$, dann beschreibt

$$\overline{\Psi}_+ := \overline{\Phi}_+ + \int_{h+}^{H} \rho \Delta q_f \, dz = \int_{h+}^{H} \int_{o}^{t^*} \overline{\Phi}_K \, dt \, dz \tag{64a}$$

die effektive Kondensation von Wasserdampf in dieser Schicht (h+, H) während der Integrationsdauer (o, t^*), wobei unter effektiver Kondensation die Differenz Kondensation minus Evaporation verstanden wird.
In der Grenzschicht erhalten wir mit den Definitionen

$$\overline{\Psi}_- := \int_{o}^{h-} \int_{o}^{t^*} \overline{\Phi}_K \, dt \, dz = - \int_{o}^{t^*} (\overline{M_f}(h-) - \overline{M_f}(o)) \, dt + \int_{o}^{h-} \rho \Delta q_f \, dz \tag{65}$$

und

$$\overline{\Phi}_- := - \int_{o}^{t^*} (\overline{M_f}(h-) - \overline{M_f}(o)) \, dt \, ,$$

die Bilanzgleichungen

$$\int_{o}^{h-} \rho \Delta T \, dz = \frac{L}{c_p} \overline{\Psi}_- - \int_{o}^{t^*} (\overline{\mathcal{E}}(h-) - \overline{\mathcal{E}}(o)) \, dt - \int_{o}^{h-} \int_{o}^{t^*} \rho \, \overline{w} \left(\frac{\partial \hat{T}_e}{\partial z} + \frac{g}{c_p} \right) dt \, dz \, , \tag{66}$$

$$\int_{o}^{h-} \rho \Delta q_d \, dz = - \overline{\Psi}_- - \int_{o}^{t^*} (\overline{\mathcal{E}}(h-) - \overline{\mathcal{E}}(o)) \, dt - \int_{o}^{h-} \int_{o}^{t^*} \rho \, \overline{w} \frac{\partial \hat{q}_e}{\partial z} \, dt \, dz \, . \tag{67}$$

Da der Fluß von Regentropfen durch die Grenzfläche h stetig sein muß, gilt $M_f(h+) = M_f(h-) = M_f(h)$. Wir definieren durch

$$\overline{\Psi} = \overline{\Psi}_+ + \overline{\Psi}_- = \int_{o}^{H} \int_{o}^{t^*} \overline{\Phi}_K \, dt \, dz \quad \text{und} \quad \overline{\Phi} = \overline{\Phi}_+ + \overline{\Phi}_-$$

die Gesamtbilanz der Kondensation und des Niederschlags in unserem Volumen und können durch die Normierung

$$\Delta \widetilde{T} = \frac{1}{M} \int_{o}^{H} \rho \Delta T \, dz \, , \qquad M = \int_{o}^{H} \rho \, dz \, ,$$

$$\Delta \widetilde{q} = \frac{1}{M} \int_{o}^{H} \rho \Delta q_d \, dz \, , \tag{68}$$

$$\tilde{\Psi} = \frac{1}{M}\overline{\Psi} \,,$$

$$\tilde{\Phi} = \frac{1}{M}\overline{\Phi} = \tilde{\Psi} - \frac{1}{M}\int_o^H \rho \Delta q_f \, dz = \int_o^{t^*} \overline{M}_f(o) \, dt \,, \tag{69}$$

$$\tilde{H}: = \frac{1}{M}\int_o^{t^*} (\overline{\mathcal{H}}(h-) - \overline{\mathcal{H}}(o)) \, dt \,,$$

$$\tilde{E}: = \frac{1}{M}\int_o^{t^*} (\overline{\mathcal{E}}(h-) - \overline{\mathcal{E}}(o)) \, dt \,, \tag{70}$$

die mittleren Änderungen von Temperatur und Feuchte sowie den Niederschlag beschreiben:

$$\tilde{\Delta T} = \frac{L}{c_p}\tilde{\Psi} - \tilde{H} - \frac{1}{M}\int_o^{t^*}\int_o^H \rho \overline{w} \left(\frac{\partial \hat{T}_e}{\partial z} + \frac{g}{c_p}\right) dt \, dz \,, \tag{71}$$

$$\tilde{\Delta q} = -\tilde{\Psi} - \tilde{E} - \frac{1}{M}\int_o^{t^*}\int_o^H \rho \overline{w} \frac{\partial \hat{q}_e}{\partial z} \, dt \, dz \,, \tag{72}$$

$$\tilde{\Phi} = \frac{1}{M}\frac{1}{F}\int_o^{t^*}\sum_{i=1}^N S_i M_{fi}(o) \, dt = \tilde{\Psi} - \frac{1}{M}\int_o^H \rho \Delta q_f \, dz \,. \tag{73}$$

Bei den numerischen Rechnungen erlaubt die getrennte Integration der einzelnen Terme der Bilanz, eine Prüfung der Genauigkeit der Rechnung.

Ein Spezialfall der Bilanz ist die Verwendung der Entrainmentformeln 3. bis 5. bei konstantem Radius. Der dabei entstehende Fehler beträgt:

$$\begin{aligned} \delta_E A: &= \frac{1}{F}\int_o^{t^*}\int_o^H \sum_{i=1}^N \frac{\partial \rho S_i \hat{w}_i}{\partial z} [A_{Ri+} - A_{Ri-}] \, dt \, dz \\ &= \frac{1}{F}\int_o^{t^*}\int_o^H \sum_{i=1}^N (1 - 2\tilde{E}_i)(\hat{A}_i - \hat{A}_e) \frac{\partial \rho S_i \hat{w}_i}{\partial z} \, dt \, dz \,. \end{aligned} \tag{74}$$

Wie jedoch die Auswertungen zeigen werden, ist dieser Fehler vernachlässigbar klein.

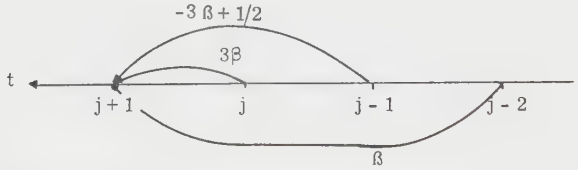
3. ERGEBNISSE

3.1 Numerische Formulierung

Zur Zeitintegration wurde das Schema von MIYAKODA (1962) verwendet:

$$(ß + 1/2)\, A_k^{j+1} = 3ß A_k^j + (1/2 - 3ß)\, A_k^{j-1} + ß A_k^{j-2} + \Delta t \tilde{A}_k^j ,$$

wobei ß eine positive Konstante ist. Wie bereits aus den Modellrechnungen von LILLY (1965) zu ersehen ist, liefert ß = 1/16 die besten Ergebnisse. Dieses Schema ist eine zeitglättende Version des leap-frog-Verfahrens, das formal auf die folgende Art in zentrale und Vorwärtsschritte zerlegt werden kann:



Hierin sind die an den Pfeilen stehenden Zahlen die Gewichte, mit denen die einzelnen Schritte belegt werden.

Da die Flächengleichung (31) selbst bei diesem zeitglättenden Verfahren zu Instabilitäten neigt, wurde bei ihrer Integration der Vorwärtsschritt von j auf j+1 durch einen diffusiven Zeitschritt

$$A_k^{j+1} = \frac{1}{2}\,(A_{k+1}^j + A_{k-1}^j) + \ldots .$$

ersetzt. Als weitere Einschränkung wurde bei Integration dieser Gleichung eine minimale und eine maximale Flächengröße festgesetzt, bei deren Überschreitung die aus der Integration gewonnenen Zahlenwerte für S_i entsprechend vergrößert bzw. verkleinert wurden. Die Auswirkungen dieser recht drastischen Eingriffe in das Gleichungssystem werden an Hand der Ergebnisse zu diskutieren sein.

Die räumlichen Ableitungen wurden jeweils durch zentrale Differenzen approximiert:

1. Advektion
$$- w_k^j \frac{A_{k+1}^j - A_{k-1}^j}{2\Delta z}$$

2. Diffusion
$$\frac{K_{Ah}}{S_{ik}^j} \gamma_i \Delta A_{ik}^j + \frac{K_{Az}}{\Delta z^2} (\hat{A}_{ik+1}^j - 2\hat{A}_{ik}^j + \hat{A}_{ik-1}^j) ,$$

wobei
$$\Delta A_{ik}^j = (\hat{A}_i - \hat{A}_e)_k^j$$

ist und $\gamma_i \Delta A^j_{ik}/L_i$ die Normalableitungen am Wolkenrand $\partial A/\partial n|_{Ri}$ vertritt.

Die vollständigen Differenzengleichungen der Wolke i haben somit die Form:

1. Kontinuitätsgleichung:

$$S^{j+1}_{ik} = \Big[ß(S^j_{ik+1} + S^j_{ik} + S^j_{ik-1}) + (1/2 - 3ß)S^{j-1}_{ik} + ßS^{j-2}_{ik} - \frac{\Delta t}{2\Delta z}\hat{w}^j_{ik}(S^j_{ik+1} - S^j_{ik-1}) -$$

$$- \frac{\Delta t}{2\Delta z}\frac{S^j_{ik}}{\rho_k}(\rho_{k+1}\hat{w}^j_{ik+1} - \rho_{k-1}\hat{w}^j_{ik-1}) + \Delta t E^j_{ik}\Big]/(ß + 1/2) ,$$

2. die übrigen prognostischen Gleichungen:

$$\hat{A}^{j+1}_{ik} = \Big[3ß\hat{A}^j_{ik} + (1/2 - 3ß)\hat{A}^{j-1}_{ik} + ß\hat{A}^{j-2}_{ik} - \frac{\Delta t}{2\Delta z}\hat{w}^j_{ik}(\hat{A}^j_{ik+1} - \hat{A}^j_{ik-1}) +$$

$$+ \Delta t \hat{B}^j_{ik} - \Delta t \Big\{\frac{E^j_{ik}}{S^j_{ik}}\Delta A^j_{ik} + \frac{K_{Ah}}{S^j_{ik}}\gamma_i \Delta A^j_{ik} +$$

$$+ \frac{K_{Az}}{\Delta z^2}(\hat{A}^j_{ik+1} - 2\hat{A}^j_{ik} + \hat{A}^j_{ik-1})\Big\}\Big]/(ß + 1/2) .$$

Für die Gleichungen der Umgebung der Wolken (Index e) gelten dieselben Differenzengleichungen mit den folgenden Ausnahmen:

1. Die Kontinuitätsgleichung fällt weg.
2. Die dritte Bewegungsgleichung wird ersetzt durch

$$\hat{w}^j_{ek} = \frac{F\overline{w}_k - \sum_i S^j_{ik}\hat{w}^j_{ik}}{F - \sum_i S^j_{ik}} .$$

3. Die in der geschweiften Klammer zusammengefaßten Entrainment- und Diffusionsterme werden durch die entsprechenden Summen über die Wolkenwerte ersetzt (siehe Gleichungen (26) bis (29)).

Vorangehende Versuche mit dem leap-frog-Verfahren waren nicht erfolgreich, weil bereits nach kurzer Integrationsdauer Instabilitäten auftraten, die nur durch drastische Glättungsmethoden beseitigt werden konnten. Dasselbe Ergebnis lieferten Experimente, in denen die Gleichungen in Bilanzform (1o) formuliert wurden.

Das Modell umfaßt K Schichten in der Vertikalen. Wegen der oberen Randbedingungen gilt:

$$\hat{w}_{i,e}{}^{j}_{K} \equiv o$$

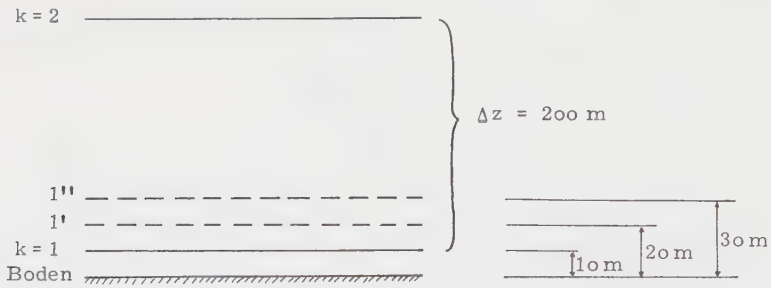
$$\hat{T}_{i,e}{}^{j}_{K} = \overline{T}_{K} = \text{const}$$

$$\hat{q}_{di,e}{}^{j}_{K} = \overline{q}_{K} = \text{const}$$

$$\hat{q}_{fi,e}{}^{j}_{K} \equiv o$$

$$S_{i}{}^{j}_{K} = S^{j}_{i\,K-1}$$

Am unteren Rand überlappen sich die Gleichungssysteme von 'freier Atmosphäre' und 'Grenzschicht' gemäß der Abbildung:



Zur Berechnung der vertikalen Ableitungen für die Schicht 1 wurden die Hilfsschichten 1' und 1'' benutzt. Die Werte an diesen beiden Schichten werden durch lineare Interpolation zwischen den Schichten 1 und 2 berechnet. Dabei wurden die Schichten 1'' und 1 verwendet für die Ableitungen

$$\frac{\partial T}{\partial z} \quad \text{und} \quad \frac{\partial q_d}{\partial z} \quad \text{in} \quad \mathcal{H} \text{ bzw. } \mathcal{E} \ .$$

Die Werte für $V_i(\hat{q}_{pi})$ am Boden wurden durch lineare Extrapolation von q_{pi} von Schicht 2 über Schicht 1 gewonnen, wobei zusätzlich $V_i(z=o) \geq o$ verlangt wird. Mit diesem Wert für V_i und dem interpolierten Wert für V_i an der Schicht 1' wurde

$$\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial M_f}{\partial z}\right)^{j}_{i\,1}$$

bestimmt. Vervollständigt wurden die Randwerte durch

$$T_B(t), \qquad q_B(t), \qquad \hat{w}^{j}_{i\,1} = \hat{w}^{j}_{e\,1} = o \qquad \text{und} \qquad S^{j}_{i\,1} = \text{const.}$$

Allen numerischen Integrationen, deren Ergebnisse diskutiert werden

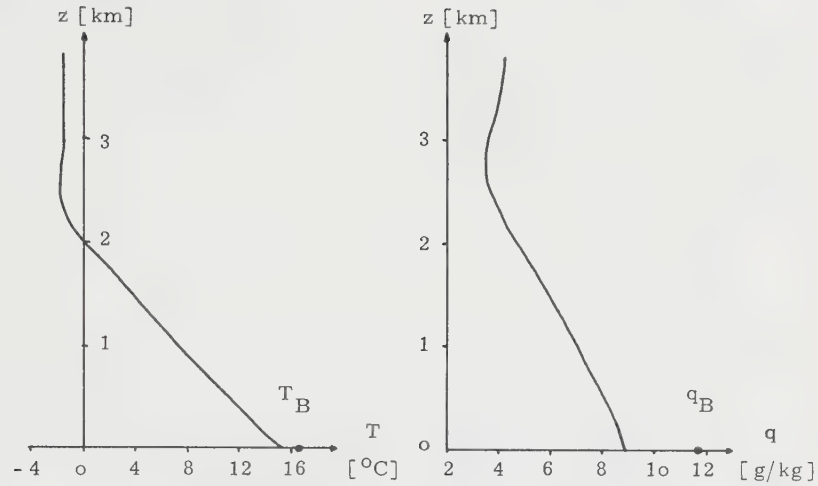


Abb. 3.1: Anfangsfelder der Temperatur und Feuchte.

sollen, lagen die folgenden Anfangsfelder (Abb. 3.1) bzw. numerischen Zahlenwerte

Δt	=	4 sec	Zeitschritt
Δz	=	2oo m	vertikaler Raumschritt
K	=	2o	Zahl der vertikalen Schichten
H	=	381o m	Modellhöhe
T_B	=	16.5 °C	Bodentemperatur
q_B	=	$q_d^*(T_B)$ = 11.7o5 g/kg	Bodenfeuchte
p_o	=	1 ooo mb	Bodendruck
c_D	=	$1.5 \cdot 1o^{-3}$	Reibungskoeffizient
U	=	1o m/s	Translationsgeschwindigkeit

zugrunde.

Die übrigen Konstanten für die Mikrophysik, das Entrainment und die Diffusion wurden durch Vorexperimente (sensitivity analysis) ermittelt. Da diese Experimente einen relativ hohen Rechenaufwand erforderten, wurden sie nur einmal durchgeführt, obwohl die in den endgültigen Rechnungen verwendeten Konstanten in einigen Fällen von den Normierungswerten abweichen:

	Normierungswerte in den Abb. 3.2/3	Werte in den späteren Rechnungen
1. Diffusion	$K_h = 8oo\ m^2/sec$	$7oo\ m^2/sec$
	$K_z = 2oo + 1oo\, w_{mi}$	$7oo\ m^2/sec$
	$\gamma_i = L_i\, \partial/\partial n\big\|_{Ri} = 2.o$	2.1
2. Entrainment	$\alpha = o.2$	o.2
	$\gamma_w = o.oo5\ sec^{-1}$	$o.oo5\ sec^{-1}$

w_{mi} ist das Maximum von $|\hat{w}_i|$ als Funktion der Zeit:
$w_{mi} = \max_{o \le z \le H} |\hat{w}_i|$.

3. Mikrophysik	$K_1 = 1o^{-3} sec^{-1}$	$1o^{-3}\ sec^{-1}$
	$K_2 = 5.2 \cdot 1o^{-3} sec^{-1} (g/m^3)^{-7/8}$	$4.16 \cdot 1o^{-3} sec^{-1} (g/m^3)^{-7/8}$
	$K_3 = 5.53 \cdot 1o^{-4} sec^{-1} (g/m^3)^{-.65}$	$5.53 \cdot 1o^{-4} sec^{-1} (g/m^3)^{-.65}$
	$K_4 = 5.1o8\ sec^{-1} m^{11/8} g^{-1/8}$	$5.1o8\ sec^{-1} m^{11/8} g^{-1/8}$
	$a = o.5\ g/kg$	o.5 g/kg

Die Analyse wurde für die Entrainmentversion 5. mit konstantem Radius R = 13oo m durchgeführt, wobei die relative Wolkenbedeckung bei 3 o/o lag. Die konvektiven Entwicklungen wurden initiiert durch kastenförmige Anfangsstörungen zwischen 21o m und 1o1o m Höhe mit einer Amplitude $\Delta T_a = o.56^oC$.

Zur Charakterisierung der konvektiven Entwicklung wurden die folgenden Parameter benutzt:

w_{mm} die maximale Vertikalgeschwindigkeit während der gesamten Integrationsdauer, d.h. $w_{mm} = \max_{o \le t \le t^*} w_m = \max_{o \le t \le t^*} \max_{o \le z \le H} |\hat{w}|$,

H_{mm} das entsprechende Maximum für den vertikalen Transport der fühlbaren Wärme $c_p \sigma_i (1 - \sigma_i) (\hat{w}_i - \hat{w}_e) (\hat{T}_i - \hat{T}_e)$,

E_{mm} der latenten Wärme $L\sigma_i(1 - \sigma_i) (\hat{w}_i - \hat{w}_e) (\hat{q}_{di} - \hat{q}_{de})$,

$\Delta\tilde{T}$ die mittlere Erwärmung,

q_{pmm} und q_{cmm} die absoluten Maxima der Konzentrationen von Regentropfen bzw. Wolkentröpfchen.

Diese Sammlung von Parametern zerfällt in drei Gruppen:

1. Die Maxima der Vertikalgeschwindigkeit und der vertikalen Wärmeströme werden in einem frühen Stadium der konvektiven Entwicklung erreicht. Sie kennzeichnen daher die Aufbauphase der Wolke.
2. Die Maxima der Konzentrationen repräsentieren die vollentwickelte Zelle.

3. Die mittlere Erwärmung gibt den integrierten Effekt der Gesamtentwicklung wieder.

Die Empfindlichkeitstests, deren Ergebnisse in den Abbildungen 3.2 und 3.3 wiedergegeben sind, können uns zwar keine optimalen Werte für die einzelnen Modellkonstanten liefern, sie zeigen aber, daß die Variationen im interessierenden Bereich unterhalb von ± 5o Prozent bleiben, womit die Bandbreite der quantitativen Ergebnisse abzuschätzen ist. Bei der Wärmebilanz, die später vornehmlich verwandt werden soll, ist die Abhängigkeit von den Modellparametern mit weniger als ± 3o Prozent noch geringer.

In den folgenden Rechnungen wurde bei konstantem Radius mit R = 8oo m in den Entrainmentformeln 2. und 5. sowie bei variablem Radius mit $R(t, z=o) = R(t=o, z) = 9oo$ m und $R_{min} = 6oo$ m in der Entrainmentformel 5. gearbeitet, wobei in den Darstellungen, die σ als unabhängige Koordinate verwenden, die errechneten Zahlenwerte über einen 'mittleren Radius' von 8oo m aufgetragen wurden (siehe auch Abb. 3.8).

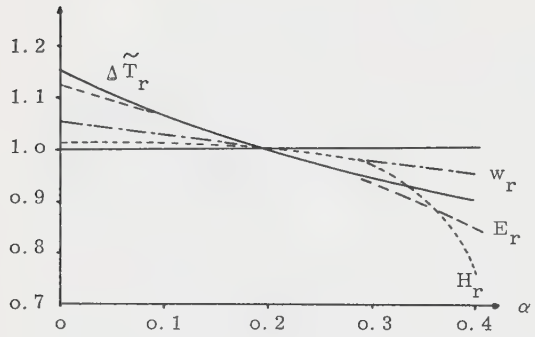
In Tabelle 1 sind die verschiedenen Experimente aufgelistet. Die Bezeichnung I - 2 charakterisiert eine Wolke mit Entrainmentversion 5., konstantem Radius von 8oo m und einer Temperaturanfangsstörung $\Delta T_a = o.56\,^{o}C$ zwischen 21o m und 1o1o m Höhe über dem Erdboden.

3.2 Die Einzelwolke ohne large - scale Konvergenz

3.21 Die Struktur der Einzelwolke

Die Entwicklung der Einzelwolke, wie sie typisch in diesen numerischen Experimenten war, ist in den Höhen-Zeitschnitten 3.4 bis 3.6 für die Vertikalgeschwindigkeit und die Konzentrationen von Wolkentröpfchen und Regentropfen dargestellt. Diese Wolke regnet nach kurzer Aufbauphase aus. Eine zweite Entwicklungsphase ist möglich, wenn die Diffusionskoeffizienten für die Regenwasserdichte Null sind und der Wolkenradius vergrößert wird. In diesem Fall folgt auf den ersten Ausregnungsprozeß ein zweiter mit allerdings wesentlich geringerer Intensität, der im vorliegenden Fall in der Abbildung 3.5 nur andeutungsweise zu erkennen ist. Die eigentliche Wolkenentwicklung setzt nach etwa 3 min ein, wenn die durch die Anfangsstörung erzeugte Vertikalbewegung genügend latente Wärme freigesetzt hat. Das Maximum der Regenintensität tritt etwa 3o min nach der Initialisierung ein und beträgt 6o mm/h, was auf die Gesamtfläche umgerechnet 1.2 mm/h entspricht. Dieser relativ starke Schauer ist eine Folge der sehr feuchten Anfangsschichtung. Durch den Konvektionsprozeß wird die Inversionshöhe von anfangs 2 4oo m auf 2 8oo m angehoben, wobei eine Abkühlung in dieser Höhe um o.29 °C eintritt. Dieser Verlauf ist für alle Modelle dieser Serie typisch mit den folgenden Einschränkungen:

1. Bei vorgegebenem Wolkenradius ist die Intensität der einzelnen Wolke umso geringer je kleiner das zum Absinken zur Verfügung stehende Umgebungsgebiet ist. Entsprechend kürzer ist auch die Lebensdauer der Wolken:



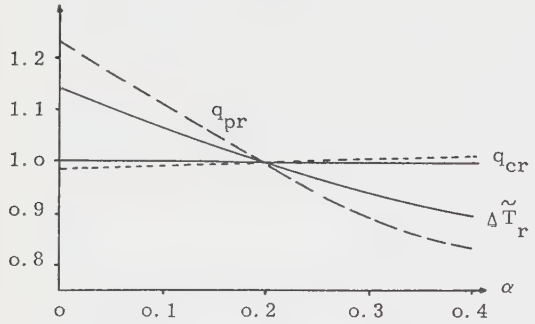
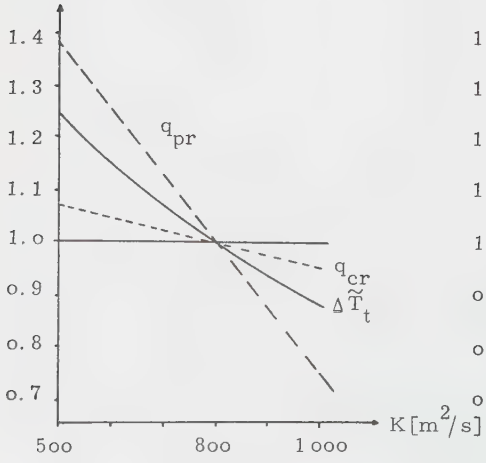


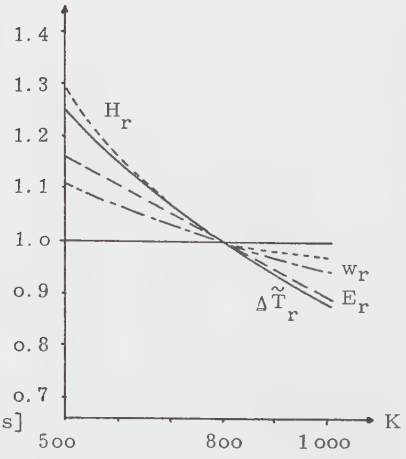
Abb. 3.2:

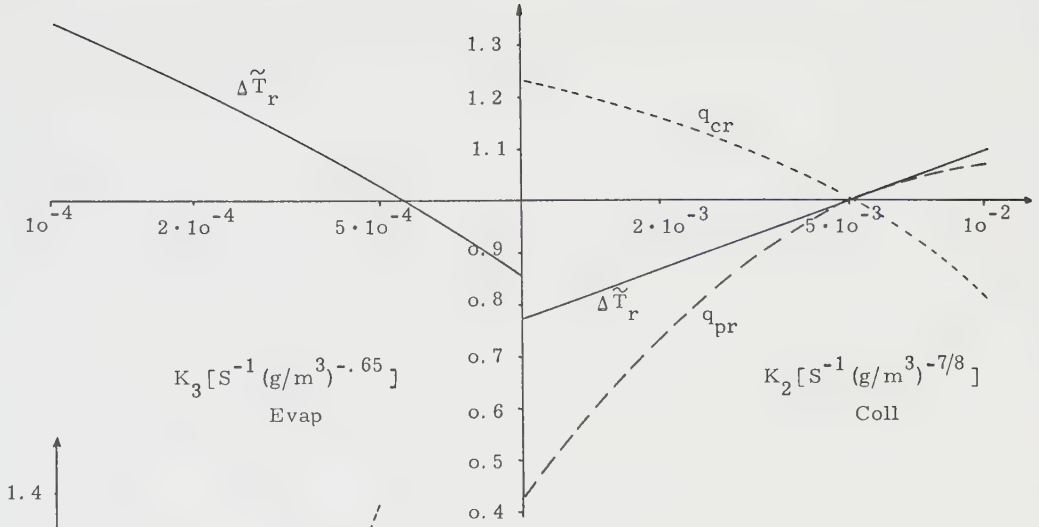
Empfindlichkeitsanalyse für die Entrainmentkonstante α und den Diffusionskoeffizienten K.

Bez: $\Delta\tilde{T}_r = \Delta\tilde{T}/\Delta\tilde{T}_o$

$A_r = A_{mm}/A_{mmo}$







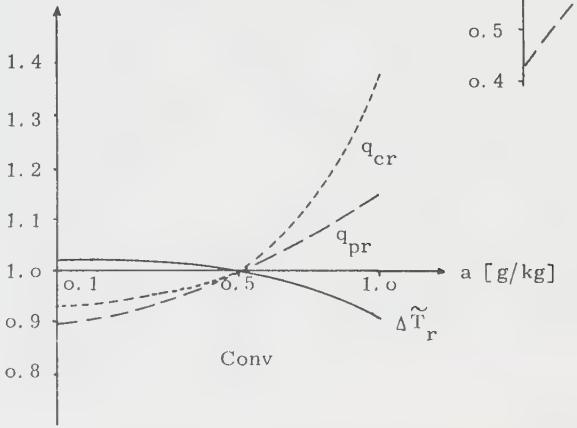


Abb. 3.5:

Tropfindlichkeitsanalyse für die Mikrophysikkonstanten K_2, K_3 und a.

Bez: $\Delta\tilde{T}_r = \Delta\tilde{T}/\Delta\tilde{T}_o$

$A_r = A_{mm}/A_{mmo}$

Serien Nr.	Entrainmentfunktion			Anzahl der Wolken				
	2	5	5	1			2	3
	R = 800 m	R = 800 m	R = R (t, z) R(o, z) = R(t, o) = 900 m	Anfangsstörungen				
				.56°C	.22°C	.45g/kg	.56/.22°C	.56/.22°C .45g/kg
I		x		x				
II		x			x			
III		x				x		
IV		x					x	
V		x						x
VI	x			x				
VII	x				x			
VIII	x						x	
IX			x	x				
X			x		x			
XI			x				x	

Tabelle 1

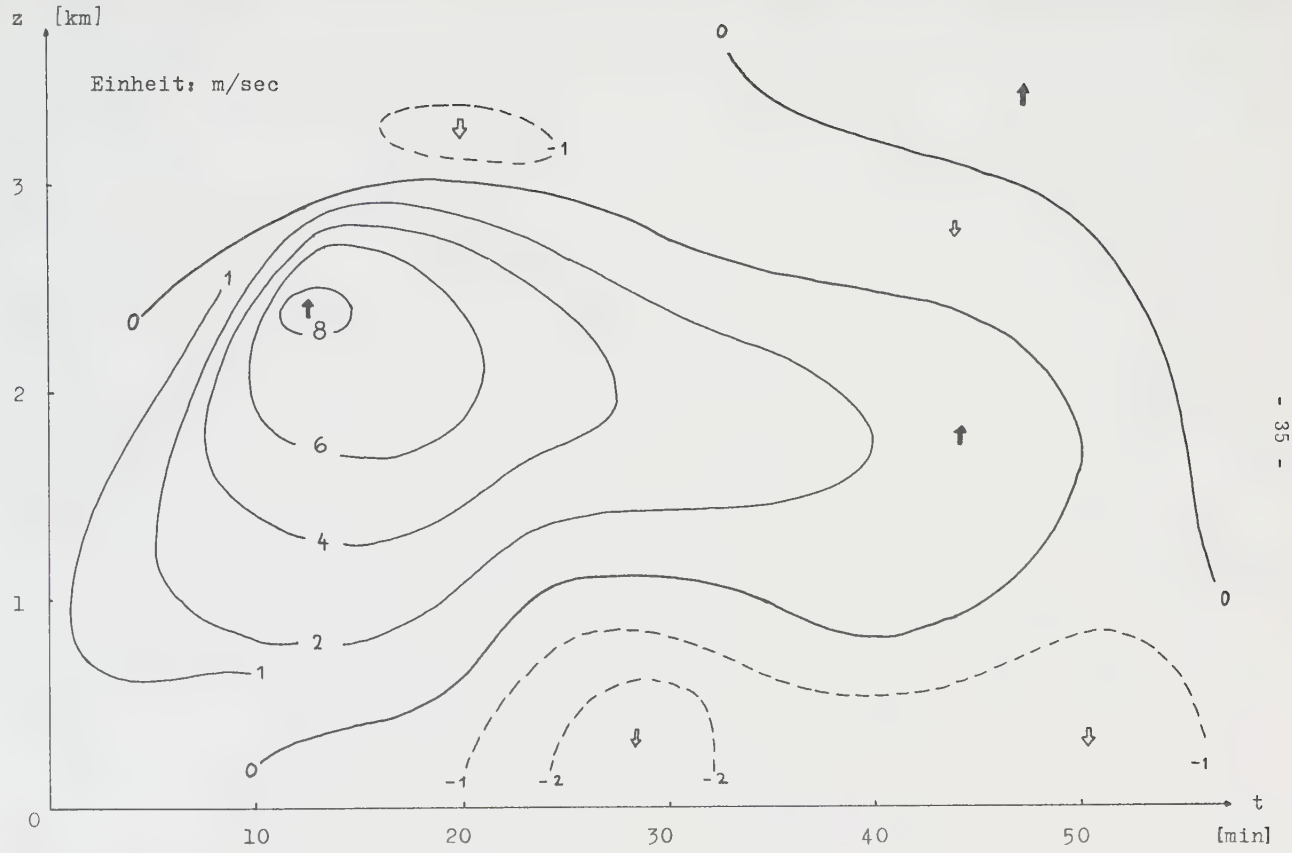


Abb.3.4: Höhen - Zeitschnitt für das Vertikalgeschwindigkeitsfeld der Wolke I - 2

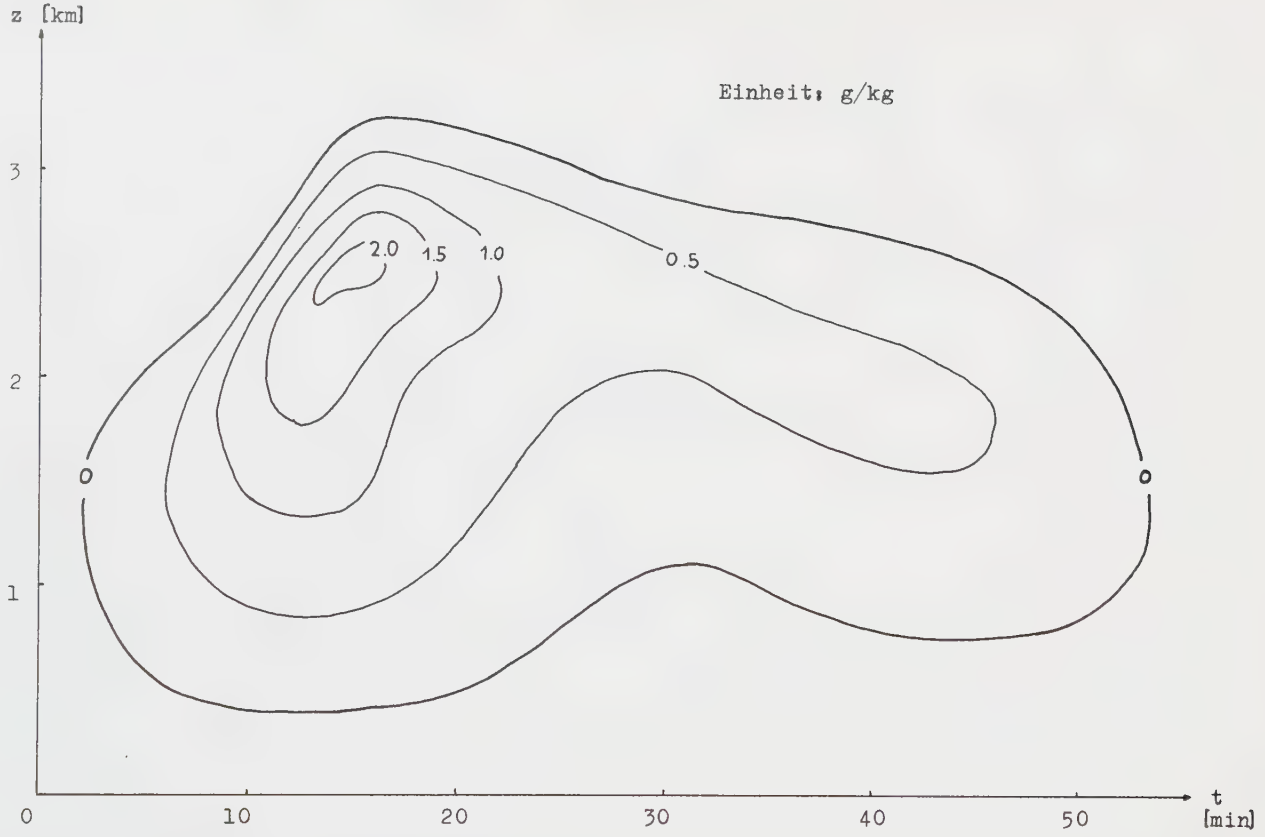


Abb.3.5: Höhen - Zeitschnitt des Feldes der Wolkentröpfchenkonzentration der Wolke I - 2

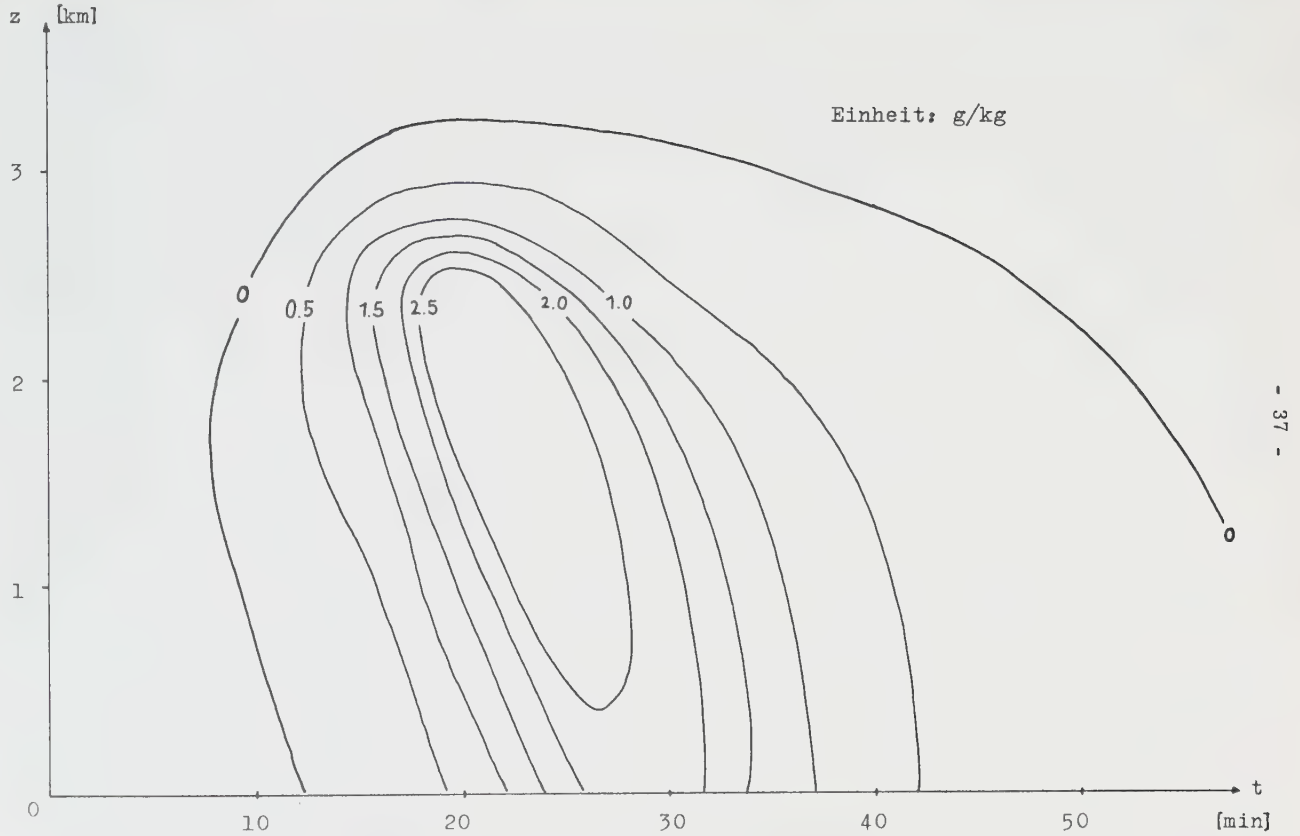


Abb.3.6: Höhen - Zeitschnitt des Feldes der Regentropfenkonzentration der Wolke I - 2

σ [°/o]	1	2	4	8	1o	2o	
Lebenszeit	> 6o	54	37	36	36	35	min

Die Lebenszeit ist hier dadurch definiert, daß keine Wolkentröpfchen mehr vorhanden sind.

2. Bei kleineren Anfangsstörungen dauert die Entwicklungsphase länger. Z.B. bei ΔT_a = o.56 °C wird nach 12 min die größte Vertikalgeschwindigkeit erreicht, bei ΔT_a = o.22 °C erst nach 2o min. Entsprechend verzögert sich auch der Regenbeginn.

Das Einsetzen des Niederschlagsbeginns im oberen Teil der Wolke, wie es Abb. 3.6 wiedergibt, stimmt mit Beobachtungen überein (Radarfilme).

Dieses Modell enthält aber auch dieselben typischen Fehler, wie sie bisher bei allen eindimensionalen Konvektionsmodellen aufgetreten sind, und die ausführlich von WARNER und anderen (197o/71) diskutiert wurden: z.B. den von den Beobachtungen stark abweichenden Verlauf des realen Flüssigwassergehalts verglichen mit dem adiabatisch möglichen (Abb. 3.7). Dieser Verlauf ist offentsichtlich von der gewählten Entrainmentparametrisierung relativ unabhängig, d.h. auch davon, ob mit konstantem oder variablem Radius gerechnet wird. Ein Grund für diese Abweichungen von den beobachteten Werten ist sicher, daß unabhängig von der Art der Variablen stets derselbe Radius mit derselben Randwertdefinition (39) angesetzt wird und folglich auch derselbe Betrag für die Entrainmentfunktion. In diesem Zusammenhang ist es notwendig, beim Modell mit variablem Radius dessen höhen- und zeitliche Änderung zu betrachten (Abb. 3.8). Ein Vergleich mit früheren Rechnungen ist hierbei nicht möglich, denn TAKEDA (1966), der die Gleichung (31) als erster abgeleitet hat, hat aus unbekannten Gründen auf die Veröffentlichung der Ergebnisse für den Radius verzichtet. Daher wurden zum Vergleich ein einfaches zylindersymmetrisches zweidimensionales Wolkenmodell mit derselben physikalischen Grundstruktur wie im eindimensionalen durchgerechnet und aus diesem Modell Radien entnommen, die den Bedingungen für die Randwerte (39) entsprachen. Die aus den horizontalen Temperatur- und Wasserdampfverteilungen des zweidimensionalen Modells errechneten Radien sind in den Abbildungen 3.9 dargestellt. Für die Temperatur erhalten wir eine ähnliche Struktur wie im eindimensionalen Modell (Abb. 3.8), beim Wasserdampf ist jedoch das obere Maximum weitgehend verschwunden. Das Verhalten des aus der Vertikalgeschwindigkeit ermittelten Radius gleicht dem der Temperatur. Die Unterschiede zwischen Temperaturabweichung und Vertikalgeschwindigkeit einerseits und Wasserdampfkonzentration andererseits liegen vor allem darin begründet, daß innerhalb des Wolkenzylinders die ersten beiden an der Wolkenobergrenze das Vorzeichen wechseln, während die Feuchteabweichung zwischen Wolke und Umgebung in allen Höhen positiv ist.

Zu dieser Diskussion der Radiusänderung gehört auch die 'Radiusverschmierung', die auftritt, wenn die Entrainmentfunktion 5. bei konstantem Radius angewendet wird. Die Abb. 3.1o zeigt für einen Bedeckungsgrad von 4 Prozent und t = 15 min die im Abschnitt über das Entrainment definierten Differenzen der Randwerte $\delta A = A_{Ri-} - A_{Ri+}$ für Temperatur und Feuchte.

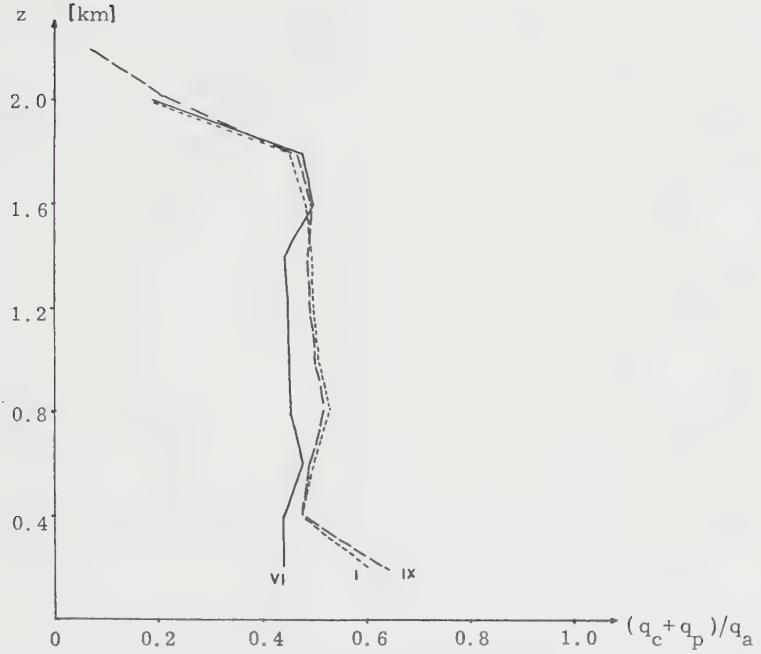


Abb. 3.7 : Verhältnis der berechneten Flüssigwasserkonzentration $q_f = q_c + q_p$ zum adiabatischen Wert q_a in Höhen über der Wolkenbasis für σ = 4 % und t = 15 min

Die Hauptzonen des seitlichen Ein- bzw. Ausströmens, die durch $\hat{w}_i$ = o gekennzeichnet sind, weisen die 'breiteste Übergangszone' auf, wenn wir $\delta A_i/(\hat{A}_i - \hat{A}_e)$ als Maß hierfür ansehen. In ihrer Struktur ist dieses Profil nicht unähnlich der vertikalen Radiusänderung in der Modellversion IX (siehe Abb. 3.8).

Trotz der sehr tiefgreifenden Vereinfachungen, die in jedem eindimensionalen Modell vorgenommen werden müssen, zeigen die Ergebnisse für die einzelne Wolke eine physikalisch nicht unrealistische Struktur. Der zeitliche Verlauf der Wolkenentwicklung, die Lebensdauer und der Wasserzyklus sind vergleichbar mit beobachteten Werten. Durch die Annahme, daß der Niederschlag nur aus dem Kernradius fällt, und nicht dem gesamten Bereich der sichtbaren Wolke, mögen die lokalen Niederschlagsintensitäten zu groß sein, der Flächenmittelwert weist jedoch eine vernünftige Größenordnung auf.

Damit ist dieses eindimensionale Modell komplex genug, um die meisten

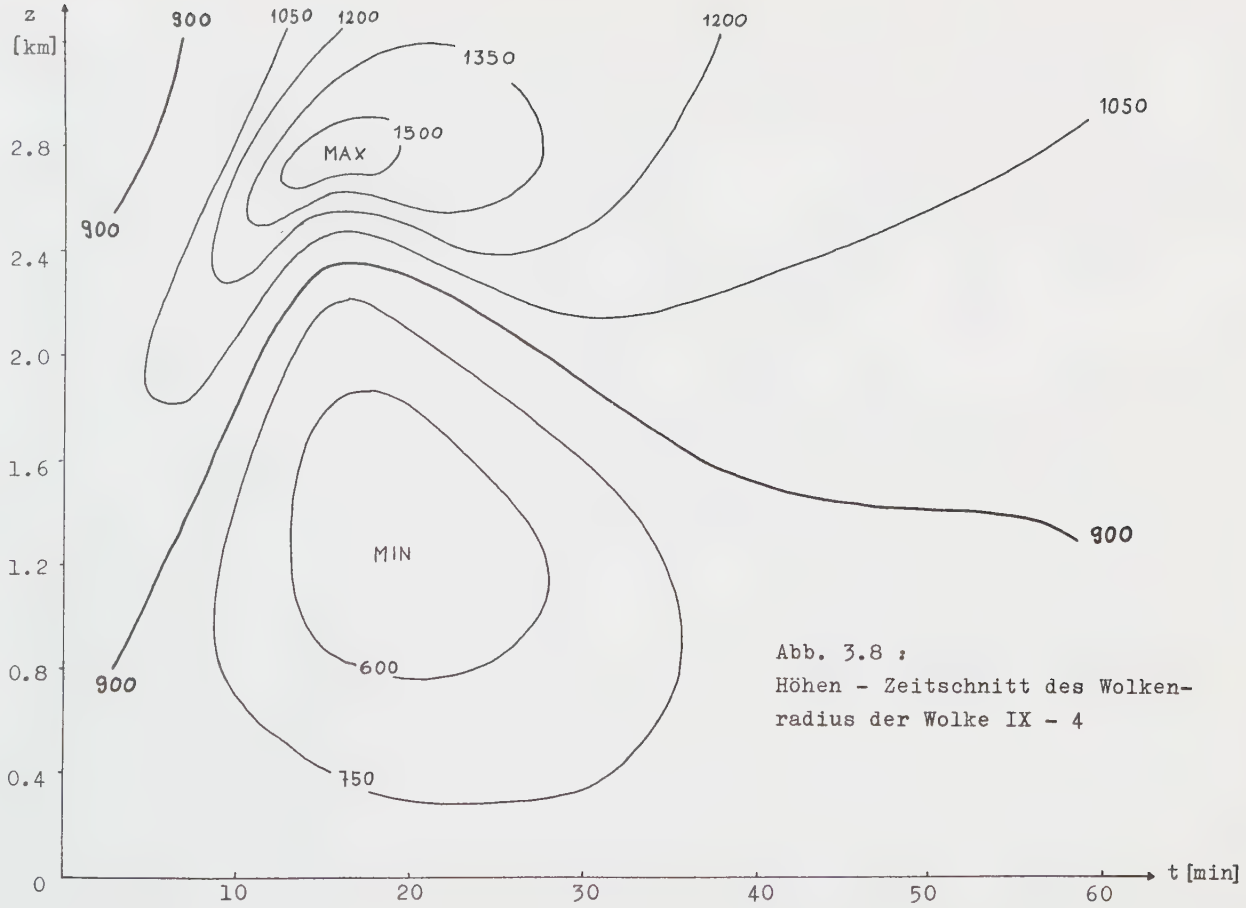


Abb. 3.8 :
Höhen - Zeitschnitt des Wolken-
radius der Wolke IX - 4

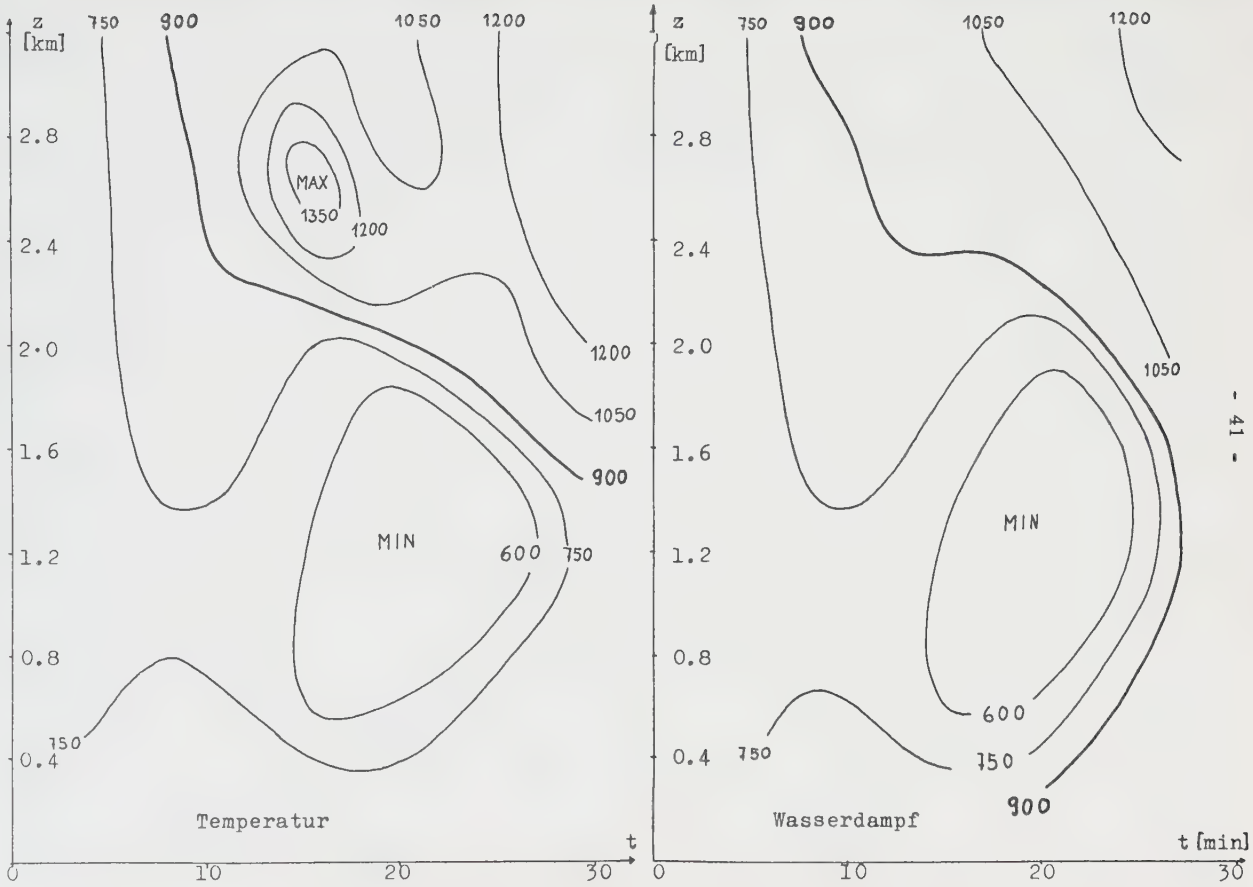


Abb.3.9: Wolkenradien aus dem zweidimensionalen Modell

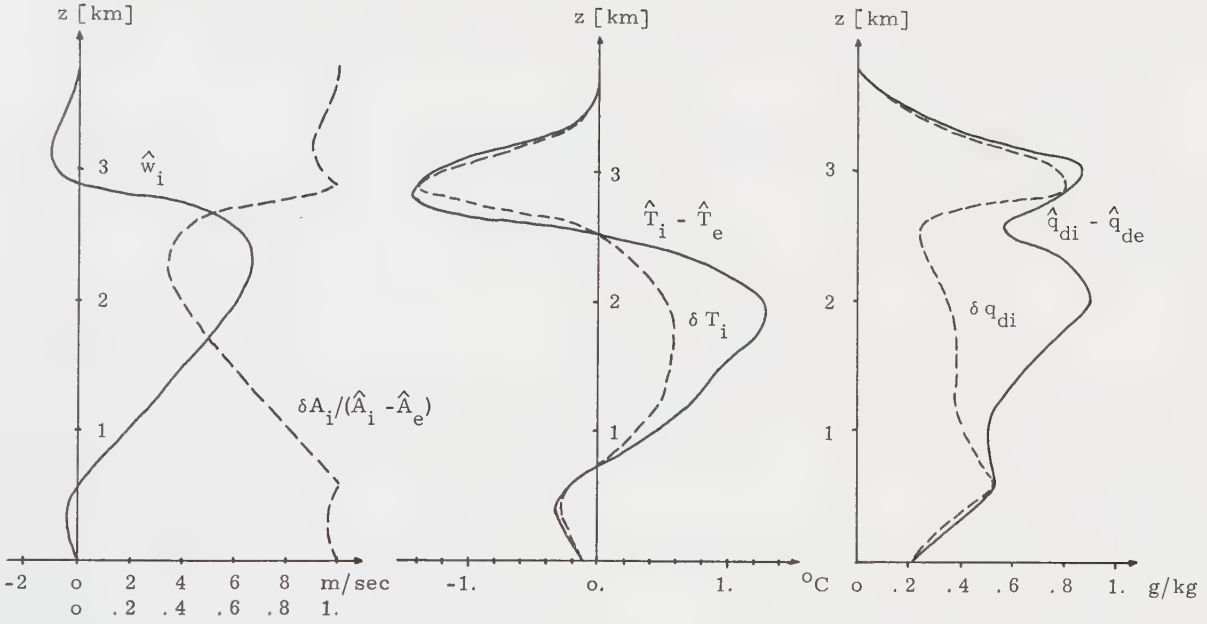


Abb. 3.1o: Vertikalgeschwindigkeit $\hat{w}_i$, 'Dicke der Randzone' $\delta A_i/(\hat{A}_i - \hat{A}_e)$ sowie Randwertdifferenzen δT_i und δq_{di} im Vergleich mit den Differenzen zwischen den Mittelwerten für die Wolke $\hat{T}_i$ und $\hat{q}_{di}$ und der Umgebung $\hat{T}_e$ und $\hat{q}_{de}$ für die Wolke I-4 bei t = 15 min.

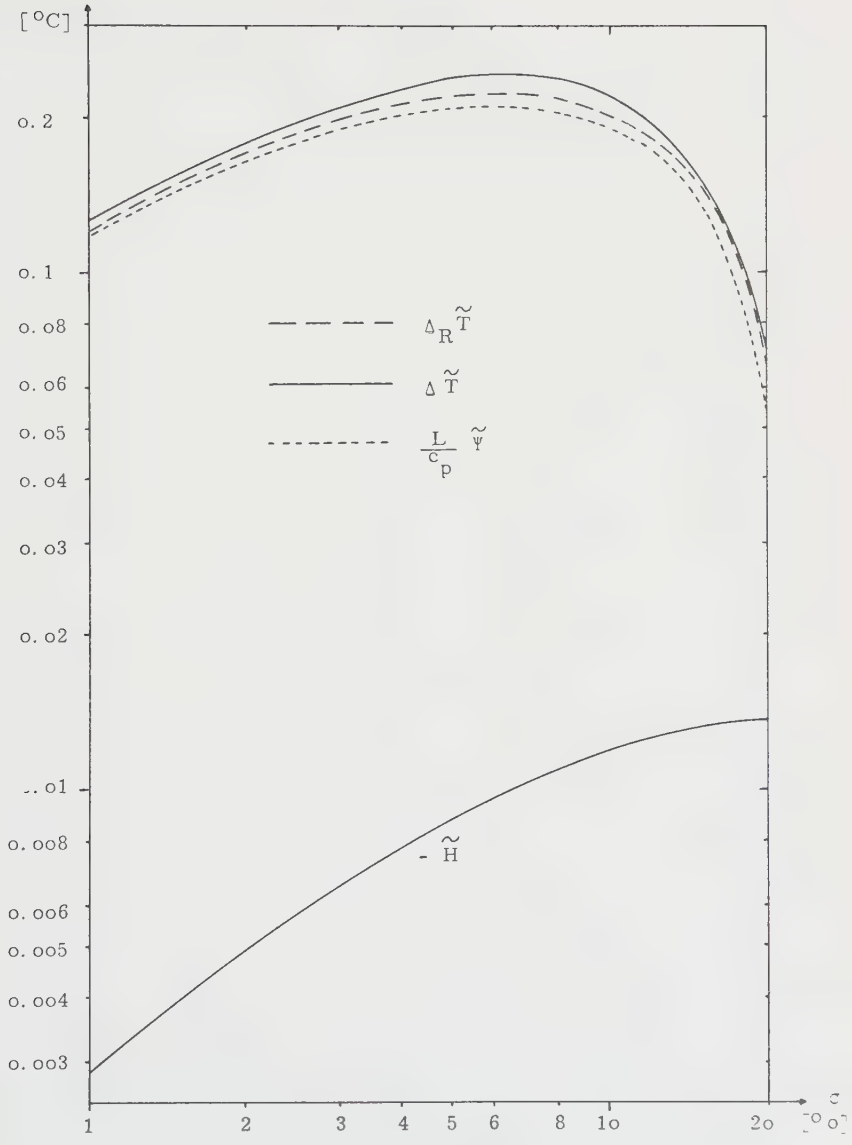


Abb. 3.11: Temperaturbilanz bei Entrainmentfunktion 5. und konstantem Radius (Serie I).

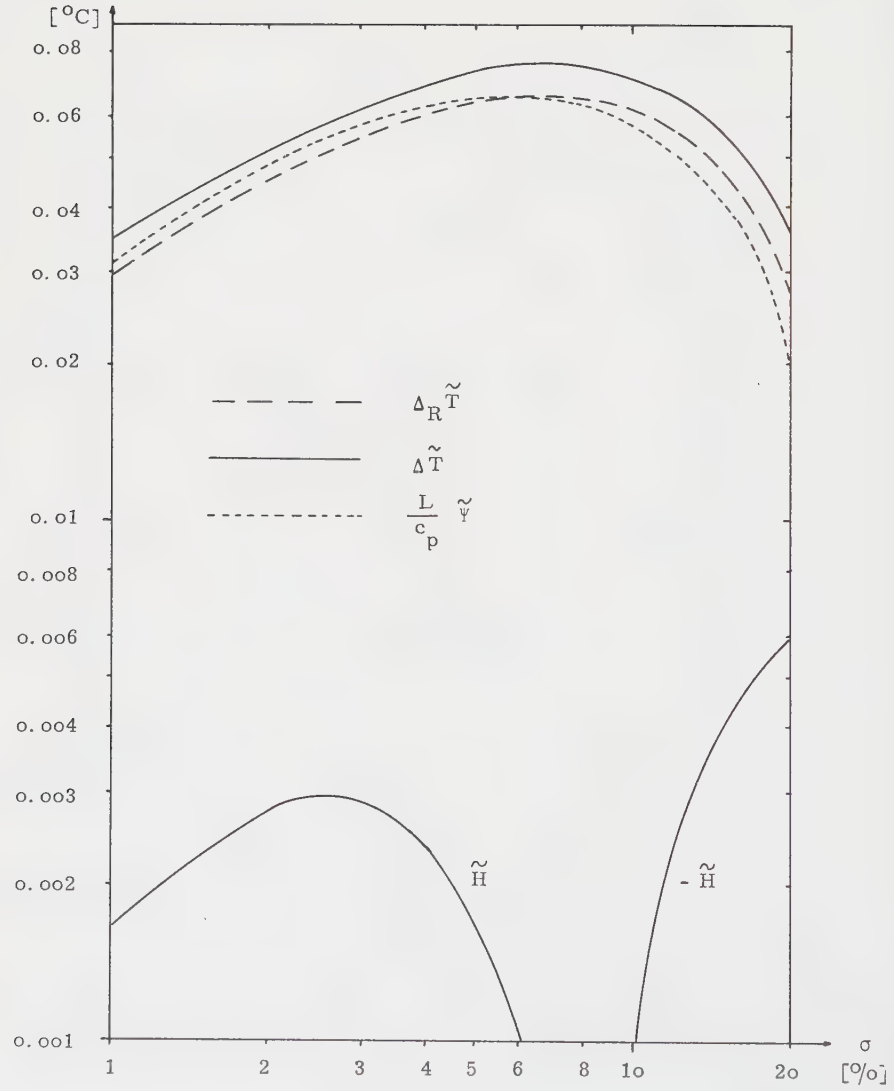


Abb. 3.12: Temperaturbilanz für die Wolken mit Entrainment-Parametrisierung 2. (Serie VI).

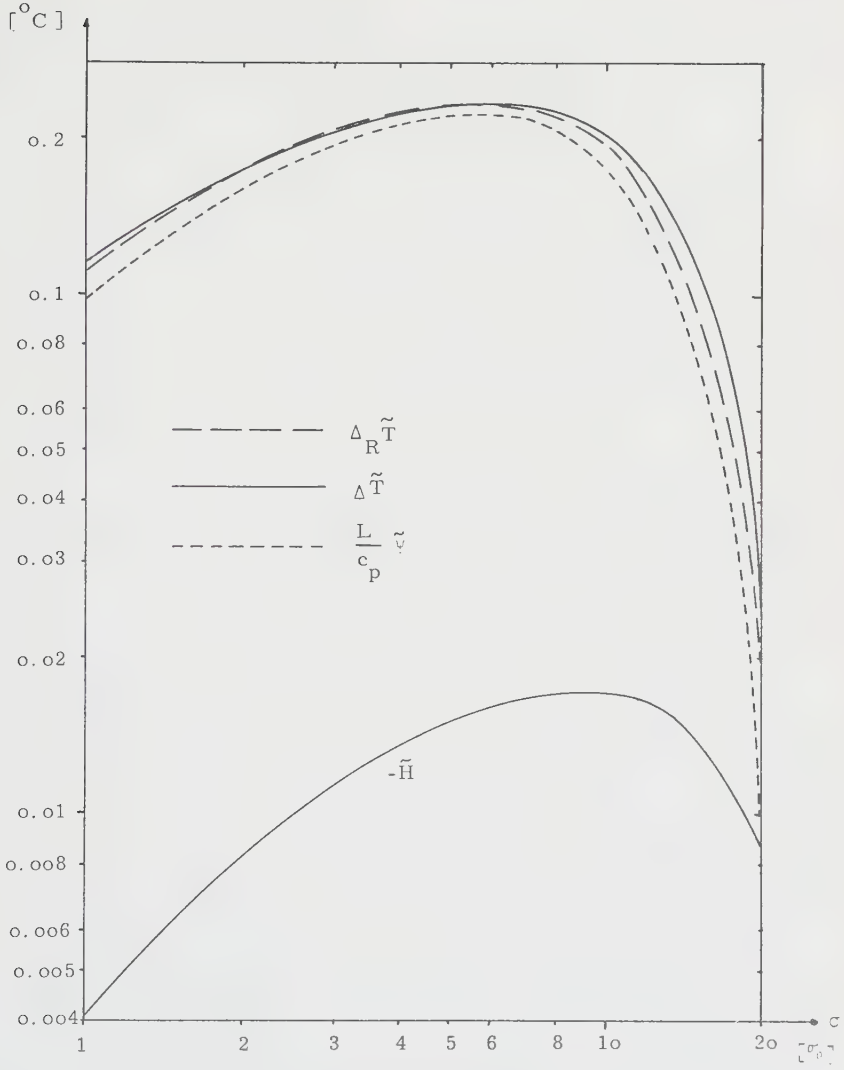
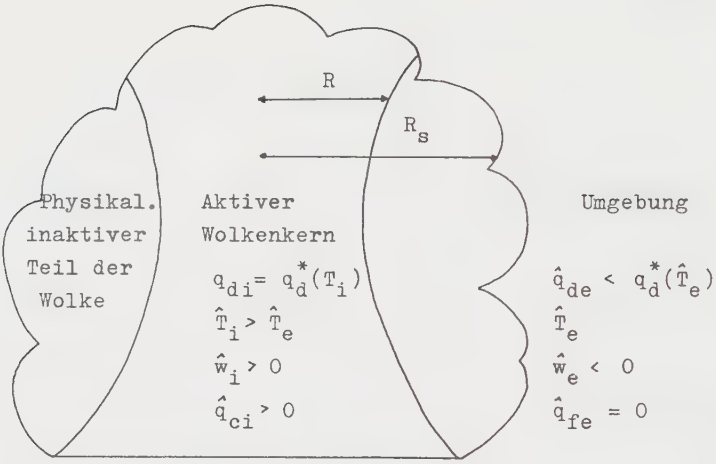
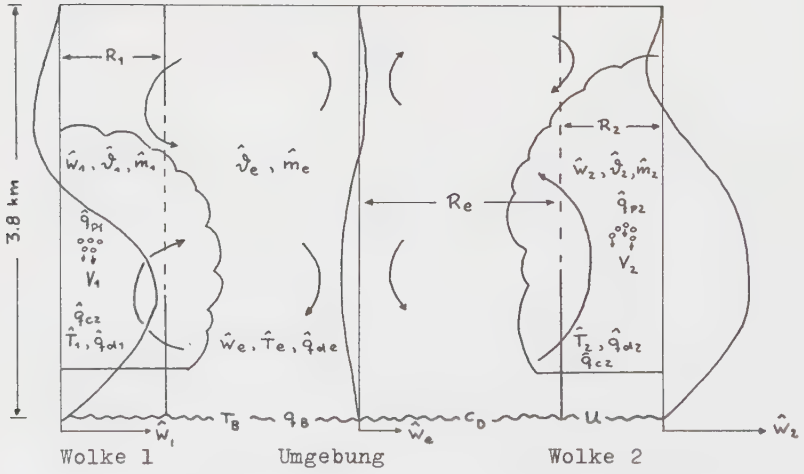


Abb. 3.13: Temperaturbilanz für die Wolken mit Entrainment-Parametrisierung 5. und variablem Radius (Serie IX).



Schema nach WEINSTEIN und DAVIS



Schematische Darstellung eines Zweiwolkensystems mit konstanten Radien

Abb. 3.14

Prozesse der konvektiven Entwicklung auch in ihrer physikalischen Größenordnung richtig zu beschreiben, aber auch einfach genug, um mit geringem Rechenaufwand * die verschiedenen Varianten konvektiver Entwicklung numerisch zu simulieren.

3.22 Bilanz der Einzelwolke

Wir hatten uns die Überprüfung der Auswahlkriterien von KASAHARA und ASAI vorgenommen. Dazu betrachten wir die Gesamtbilanzen für eine einzelne Wolke mit Umgebung. Die einzelnen Summanden der Bilanzgleichung für die Temperatur sind in den Abbildungen 3.11 bis 3.13 dargestellt. Als erster Punkt ist die Fehlerdifferenz zwischen $\Delta\tilde{T}$ aus den numerischen Werten für die Mitteltemperatur und $\Delta\tilde{T}_R$, der Summe der Terme der rechten Seite aus Gleichung (71), festzuhalten, die je nach Entrainmentversion zwischen 3 und 15 Prozent liegt. Da die Summen über die Diffusions- und Entrainmentterme identisch verschwinden sollten, sind die auftretenden Differenzen auf die folgenden Punkte zurückzuführen:

1. Truncation - Fehler.
2. Die advektiv berechneten Größen $\hat{A}_i$ und $\hat{A}_e$ müssen in Flächenmittelwerte umgesetzt werden. Dieser Fehler wächst mit σ.
3. Die zeitliche Integration erfolgte für die Äquivalenttemperatur und die Summe der Konzentrationen von Wasserdampf und Wolkentröpfchen, während die Bilanzen für Temperatur und Wasserdampfkonzentration aufgestellt wurden. Der Fehler, der bei der Berechnung von T, q_d und q_c aus δ und m entsteht, ist vernachlässigbar klein. Wesentlich ist jedoch hier die Ungenauigkeit des zeitlichen Differenzenschemas mit $o(\Delta t^2)$. Eine Herabsetzung der Zeitschritte Δt brachte jedoch keine bedeutenden Verbesserungen.
4. Beim Modell mit variablem Radius ist die Veränderung des zeitlichen Differenzenschemas von Bedeutung. Ohne diese Manipulation war jedoch eine stabile Integration der Kontinuitätsgleichung nicht möglich.
5. Der Entrainmentfehler, der bei der Entrainmentfunktion 5. in Verbindung mit konstantem Radius entsteht, ist vernachlässigbar klein ($\leq 2 \cdot 10^{-3}$ °C bzw. $\leq 5 \cdot 10^{-4}$ g/kg).

Die Tatsache, daß $\Delta\tilde{T}$ fast stets größer ist als $\Delta\tilde{T}_R$ kann durch die Anwendung des advektiven Schemas in Zusammenhang mit der Krümmung des vertikalen Temperaturprofils durch die Inversion erklärt werden.

Die Struktur der Kurven für die mittlere Erwärmung $\Delta\tilde{T}$ und die Summe der Randwerte aus Gleichung (71) $\Delta\tilde{T}_R$ stimmt so gut überein, daß wir trotz der Differenzen in der Bilanz aus ihr einige Schlüsse ziehen können.

Bei der vorgegebenen Temperatur- und Feuchteverteilung sowie der Anfangsstörung von ΔT_a = 0.56 °C liegen die Maxima der mittleren Erwärmung und des Niederschlags jeweils zwischen 5.5 und 6.5 Prozent Wolken-

---

* Das Verhältnis von Rechenzeit zu physikalischer Zeit beträgt für die Einzelwolke mit Umgebung auf der CYBER 72 1 : 3o auf der CDC 3300 1 : 1o.

bedeckung. Diese Bedeckungsgrade beziehen sich auf den aktiven Kern der Wolke. Die sichtbare Wolke kann wesentlich größer sein, wie die Skizze 3.14 zeigt. Eine Abschätzung für die sichtbare Wolke kann die Radiusänderung aus dem Modell mit variablem Radius (Abb. 3.8) liefern. Sieht man den dort errechneten maximalen Radius als den Radius der sichtbaren Wolke an, so erhalten wir eine etwa viermal so große relative Bedeckung für die sichtbare Wolke σ_S, d.h. im Maximum des Niederschlags σ_S = 22 - 26 %.

In den Absolutwerten unterscheiden sich die beiden auf dem Entrainmentansatz 5. basierenden Versionen erheblich von dem Modell, das mit dem Ansatz 2. arbeitet. Während die maximale Vertikalgeschwindigkeit in allen Versionen annähernd gleich groß ist, ist die Effektivität bei der Entrainmentfunktion 2. wesentlich geringer. Ein Grund hierfür ist der stärkere horizontale Austausch, weil

$$\left| \frac{S}{\rho} \frac{\partial \rho w}{\partial z} \right|$$

meist erheblich größer ist als

$$\left| 2\pi\alpha R w \frac{1}{\rho \gamma_w} \frac{\partial \rho w}{\partial z} \right| .$$

Ein geringerer Austausch an den Rändern der Wolkenelemente läßt den Aufwindschlot wie einen 'Kanal' wirken, der sehr effektiv fühlbare und latente Wärme vertikal transportiert. Diese Kanalwirkung ist am stärksten im mittleren Teil der Wolke, in dem die Vertikalgeschwindigkeiten am größten sind. An der Obergrenze der Wolken findet eine starke horizontale Durchmischung statt, die im Modell mit variablem Radius durch die Pilzform gekennzeichnet ist. Durch diese breite Ausflußzone im oberen Wolkenteil kann der 'Kanal' im Mittelteil stets wirksam Wärme, Feuchte und Impuls in die höheren Schichten transportieren und so eine hohe Effektivität des Konvektionsvorgangs sicherstellen. Die Modellversion mit der Entrainment-Parametrisierung 5. und konstantem Radius simuliert denselben Prozeß durch die interne Radiuserweiterung über die Differenz der inneren und äußeren Randwerte.

Die hier beschriebene 'Kanalfunktion' kann das Modell mit der Entrainmentfunktion 2. nicht erfüllen. Durch die starke Entrainmentwirkung im mittleren und unteren Teil der Wolke tritt sehr bald eine Stabilisierung der thermischen Schichtung ein, die die weitere konvektive Aktivität vermindert. Die Entrainmentformulierung 2. führt außerdem zu einer hohen Verdunstungsrate, die nur einen geringen Niederschlag zuläßt.

Die Feuchtebilanz ähnelt weitgehend der Temperaturbilanz, weil der Hauptsummand in beiden Gleichungen die effektive Kondensation bzw. der Niederschlag ist (siehe Abb. 3.15 bis 3.17). Lediglich in der Modellversion mit variablem Radius IX (Abb. 3.17) wachsen die Differenzen zwischen $\Delta \tilde{q}_d$ und $\Delta_R \tilde{q}_d$ für $\sigma \geq 0.09$ über das gewohnte Maß an und erreichen eine nicht mehr tragbare Größenordnung. Die Größe dieser Differenz kann nur auf die Methode der Flächenintegration zurückgeführt werden, bei der einer der Vorwärtsschritte durch einen diffusiven Schritt ersetzt worden war. Da die Temperaturbilanz und mit ihr der Niederschlag keine so drastischen Effekte

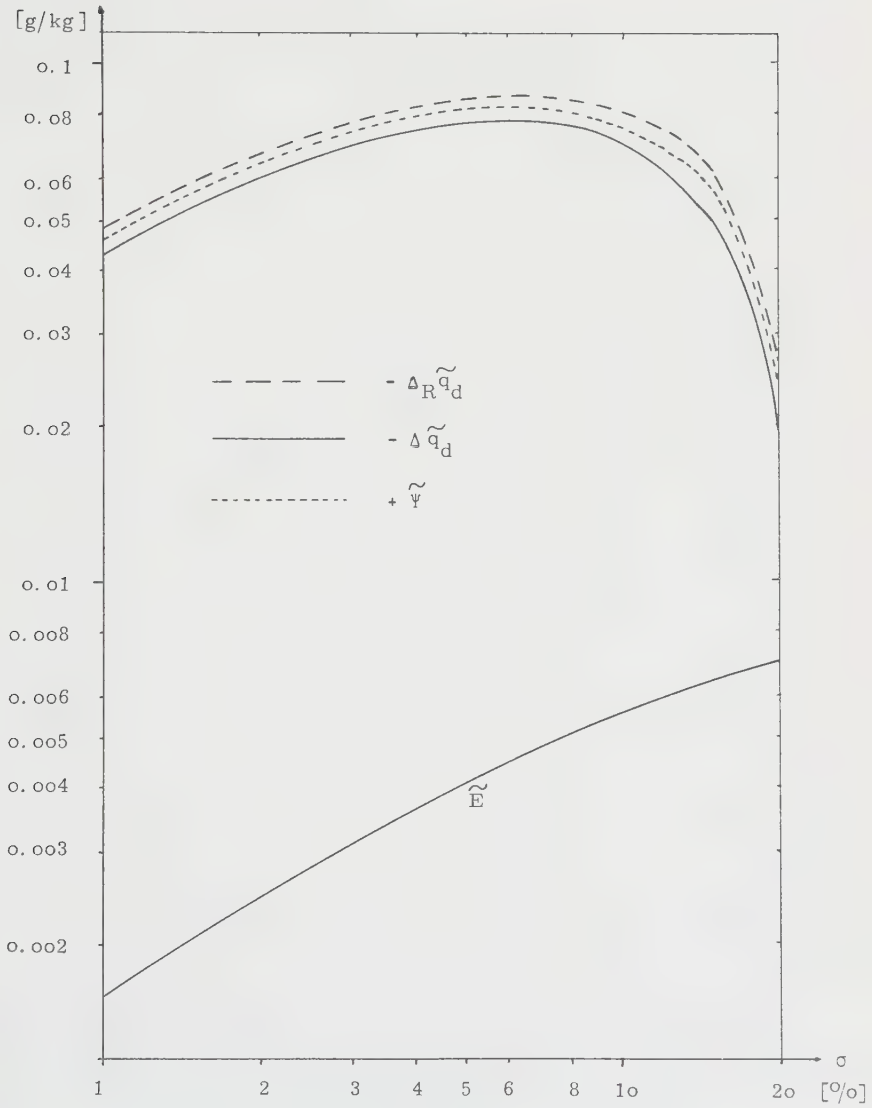


Abb. 3.15: Feuchtebilanz der Wolken der Serie I.

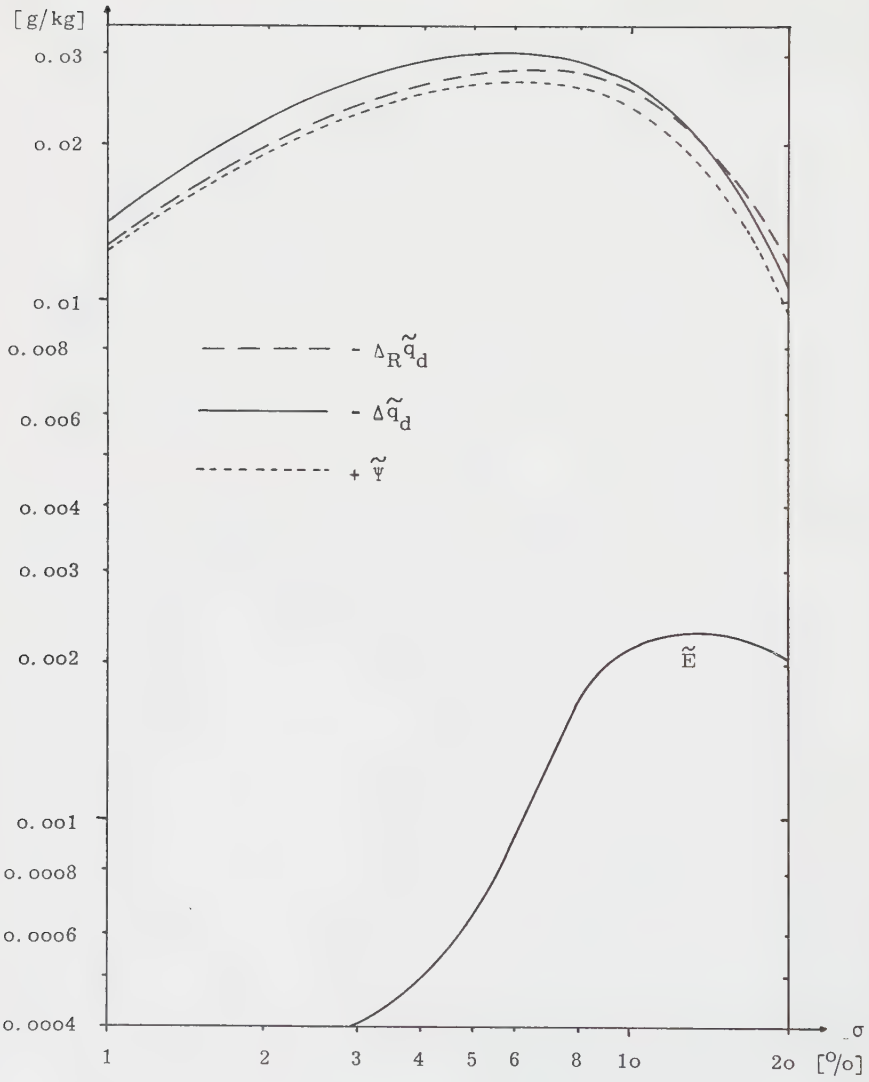


Abb. 3.16: Feuchtebilanz der Wolken der Serie VI.

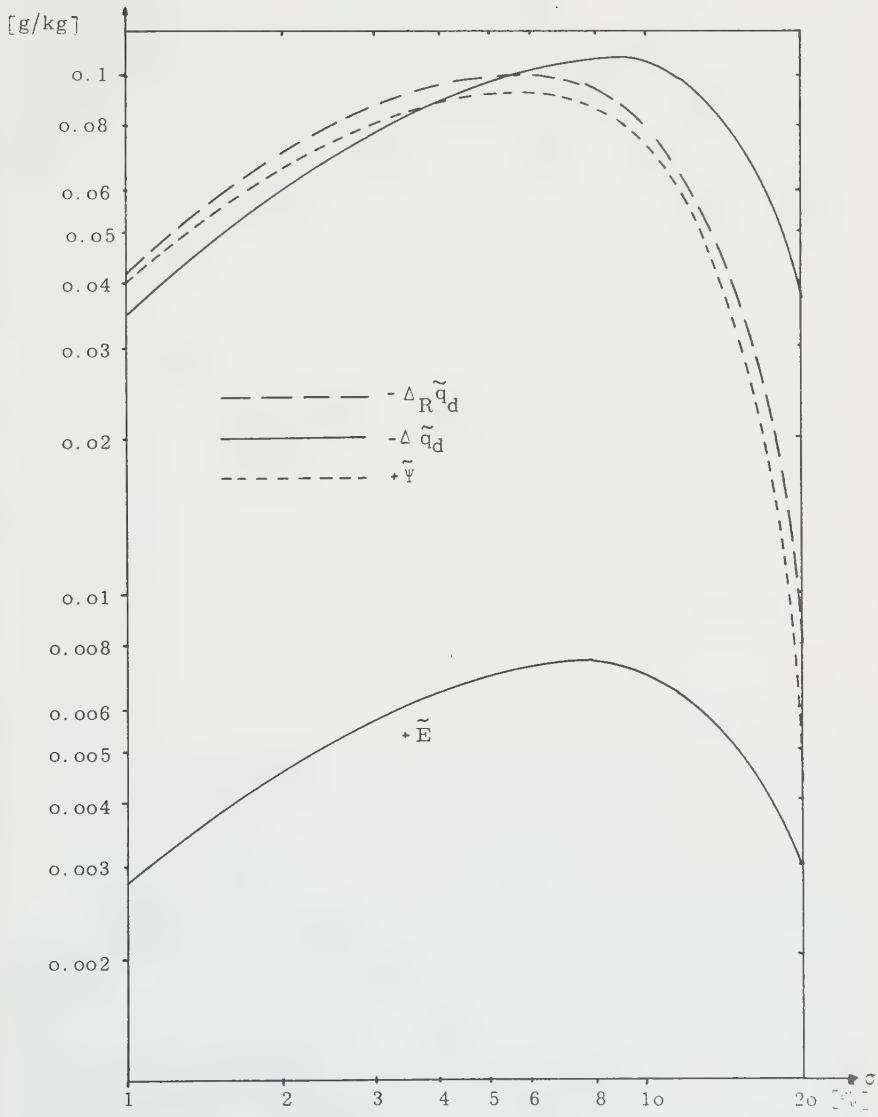


Abb. 3.17: Feuchtebilanz der Wolken der Serie IX.

aufweisen, muß zusätzlich noch ein physikalischer Unterschied für dieses abweichende Verhalten des Wasserdampffeldes verantwortlich sein. Einen Ansatzpunkt für eine physikalische Erklärung bieten uns die Flächengleichungen (14a) und die Entrainmentformulierung, die nach (38a) eng mit dem Temperaturfeld verknüpft ist. Die enge Relation zwischen Temperatur, Vertikalgeschwindigkeit und Wolkenfläche durchzieht das ganze Gleichungssystem. Die Feuchte wird dabei weitgehend außer acht gelassen. Das Sonderverhalten der Feuchte wird auch durch die Abbildungen 3.8 bis 3.1o dokumentiert. Da dieser so physikalisch gedeutete Sachverhalt in abgeschwächter Form auch die anderen Modellversionen betrifft, wird in zukünftigen Untersuchungen zu prüfen sein, ob eine nicht so schematische Randwertfestlegung wie die in Gleichung (39) getroffene zu besseren Ergebnissen führt.

Auf Grund der Ergebnisse der Bilanz für die Einzelwolke bieten sich für die folgenden Untersuchungen die mittlere Temperaturänderung $\Delta\widetilde{T}$ und der ausgefallene Niederschlag $\bar{\Phi}$ als Entscheidungskriterien an (Für $\sigma \geq$ o.o2 ist $\widetilde{\Psi} = \widetilde{\Phi}$). Ihre Kurven sind in der doppelt-logarithmischen Darstellung annähernd parallel und schließen die Kuve der Summe der Randintegrale $\Delta_R\widetilde{T}$ ein.

Nachzutragen bleibt noch die Auswertung der Fehler, die entstehen, wenn die Entrainmentfunktion 5. zusammen mit konstantem Radius verwandt wird. Wie die Abbildung 3.18 zeigt, bleibt der Fehler weit unter der üblichen Fehlergrenze der Bilanz, sodaß auf ihn keine Rücksicht genommen werden muß.

KASAHARA und ASAI hatten als eines ihrer Entscheidungskriterien die Erzeugung maximaler kinetischer Energie angesehen:

$$\overline{K}_{mm} = \max_{o \leq t \leq t^*} \int_o^H \rho \, \frac{\overline{w}^2}{2} \, dz \Big/ \int_o^H \rho \, dz \; .$$

Die in Abbildung 3.19 wiedergegebenen Kurven haben ihre Maxima bei teilweise wesentlich größeren Wolkenbedeckungsraten als die Erwärmungs- und Niederschlagskurven. Dieser Effekt ist bereits von KASAHARA und ASAI im Vergleich mit den zeitintegrierten vertikalen Transporten an fühlbarer Wärme festgestellt worden. Seine Ursache liegt in der starken Erzeugung von kinetischer Energie in der Aufbauphase. Diese Aufbauphase wird stärker durch die Anfangsstörung als durch die Flächenverhältnisse σ_i kontrolliert (siehe auch Abb. 3.24), sodaß die Kurven der maximalen kinetischen Energie für kleine σ annähernd mit $\sigma/1-\sigma$ ansteigen. Wird eine geringere Anfangsstörung verwendet, so liegen die Maxima der entsprechenden Kurven näher zusammen (vgl. Abb. 3.19 mit Abb. 3.2o). Dieses Ergebnis zeigt, daß die Maximalisierungskonzepte nicht unabhängig von der Annahme der Anfangsstörungen betrachtet werden können, wenn auch die Maxima der Kurven bei noch schwächeren Anfangsstörungen nicht unter σ = 4 % sinken.

Die Analyse der Kurven der mittleren Erwärmung $\Delta\widetilde{T}$ und des Niederschlags $\bar{\Phi}$ unterstützt für die Einzelwolke die Ergebnisse von KASAHARA und ASAI für den konvergenzfreien Fall.

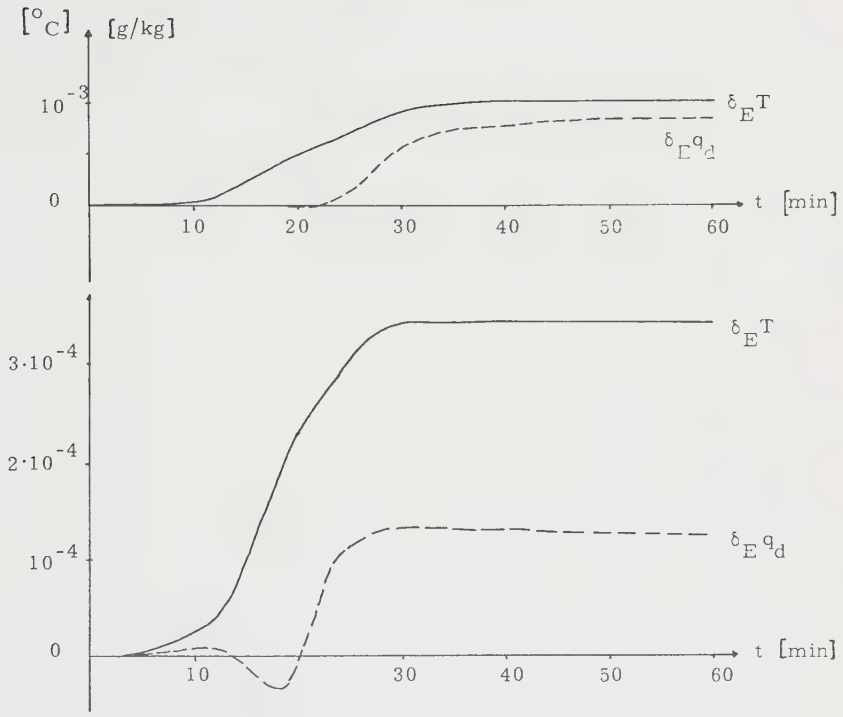


Abb. 3.18 : Entrainmentfehler in der Temperaturbilanz $\delta_E T$ und der Feuchtebilanz $\delta_E q_d$ für die Wolken I - 1 und I - 8

3.3 Das Wolken-System ohne large-scale Konvergenz

Die unterschiedliche Entwicklung der konvektiven Wolken bei verschiedenen Anfangsstörungen gibt uns eine Methode in die Hand, die gegenseitige Wechselwirkung von verschieden starken konvektiven Wolken zu studieren. Dazu wurden zwei Wolken mit den Anfangsstörungen ΔT_a = o.56 °C und o.22 °C in einer gemeinsamen Umgebung simuliert.

Die Punkte in den Abbildungen 3.21 bis 3.23 stellen die mittlere Erwärmung und den Niederschlag in diesem Zweiwolkensystem dar. Die ausgezogenen und gestrichelten Kurven sind

links die Summe der entsprechenden Größen aus den Einzelwolkenexperimenten,

rechts das für die jeweils stärkere Einzelwolke erzielte Ergebnis.

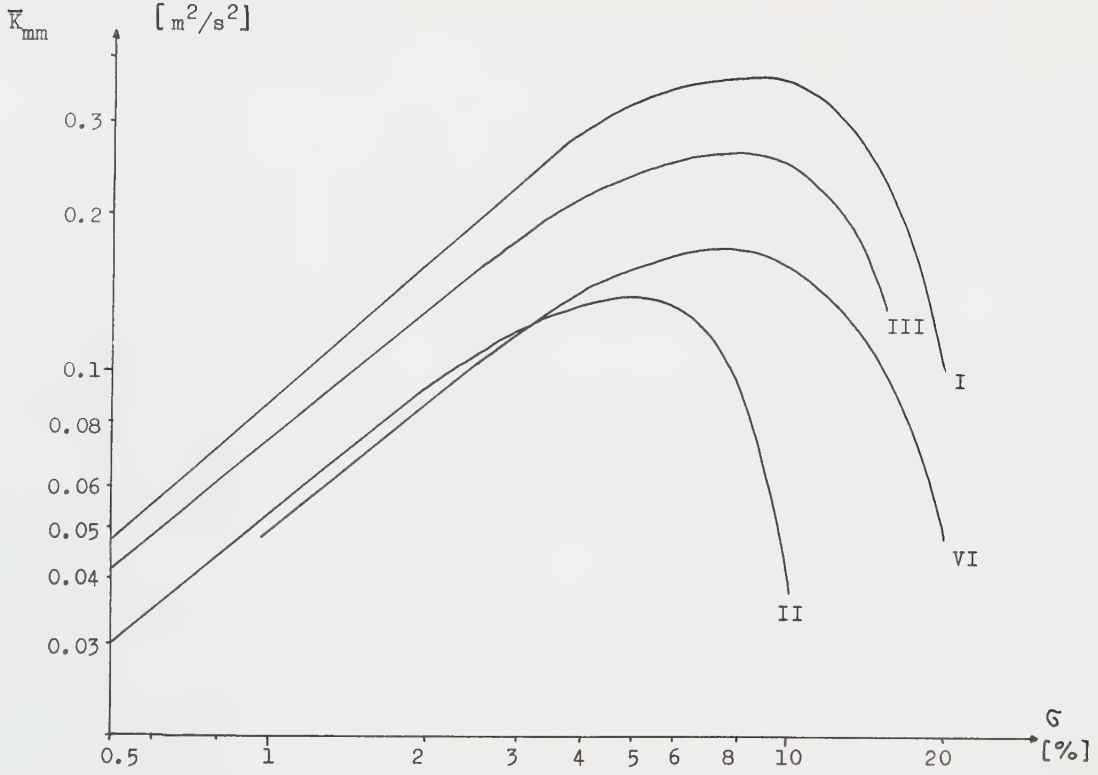


Abb. 3.19 : Maximale Kinetische Energie $\overline{K}_{mm}$ für verschiedene Modellexperimente

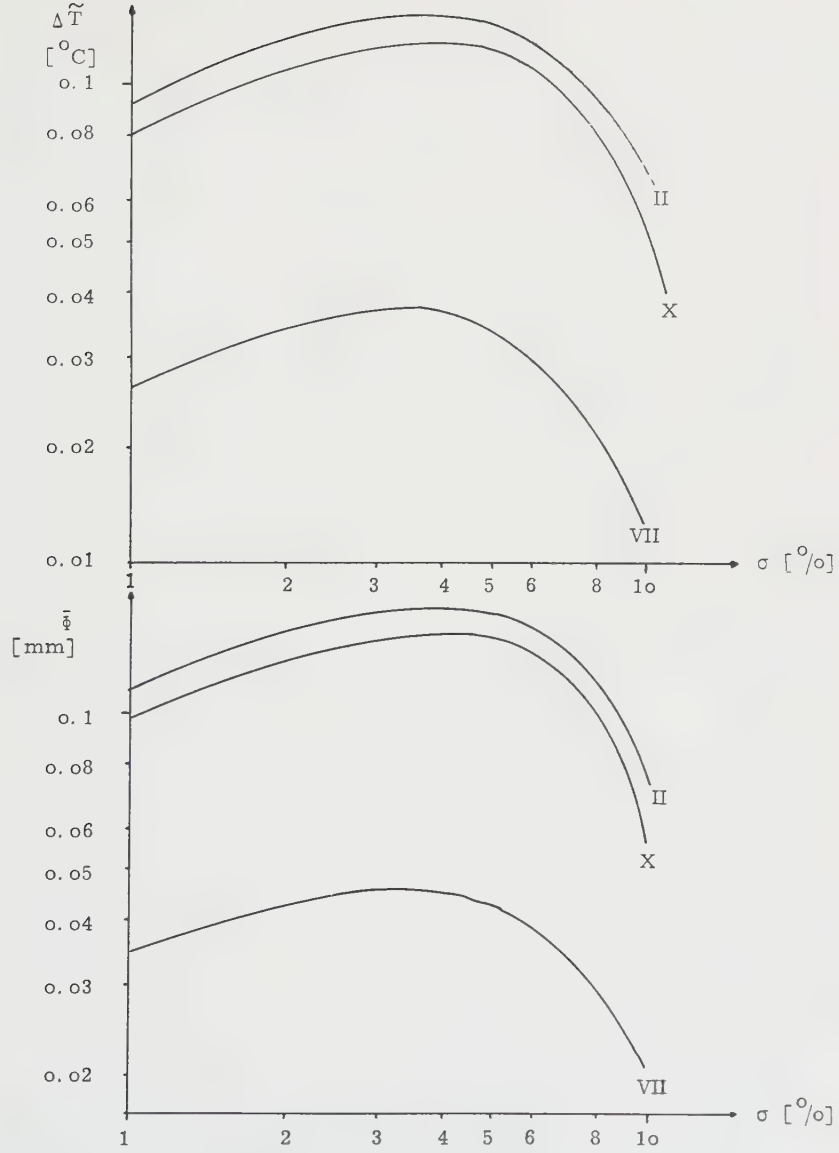


Abb. 3.2o: Erwärmung und Niederschlag für die Wolke mit Anfangsstörung ΔT_a = o.22 °C.

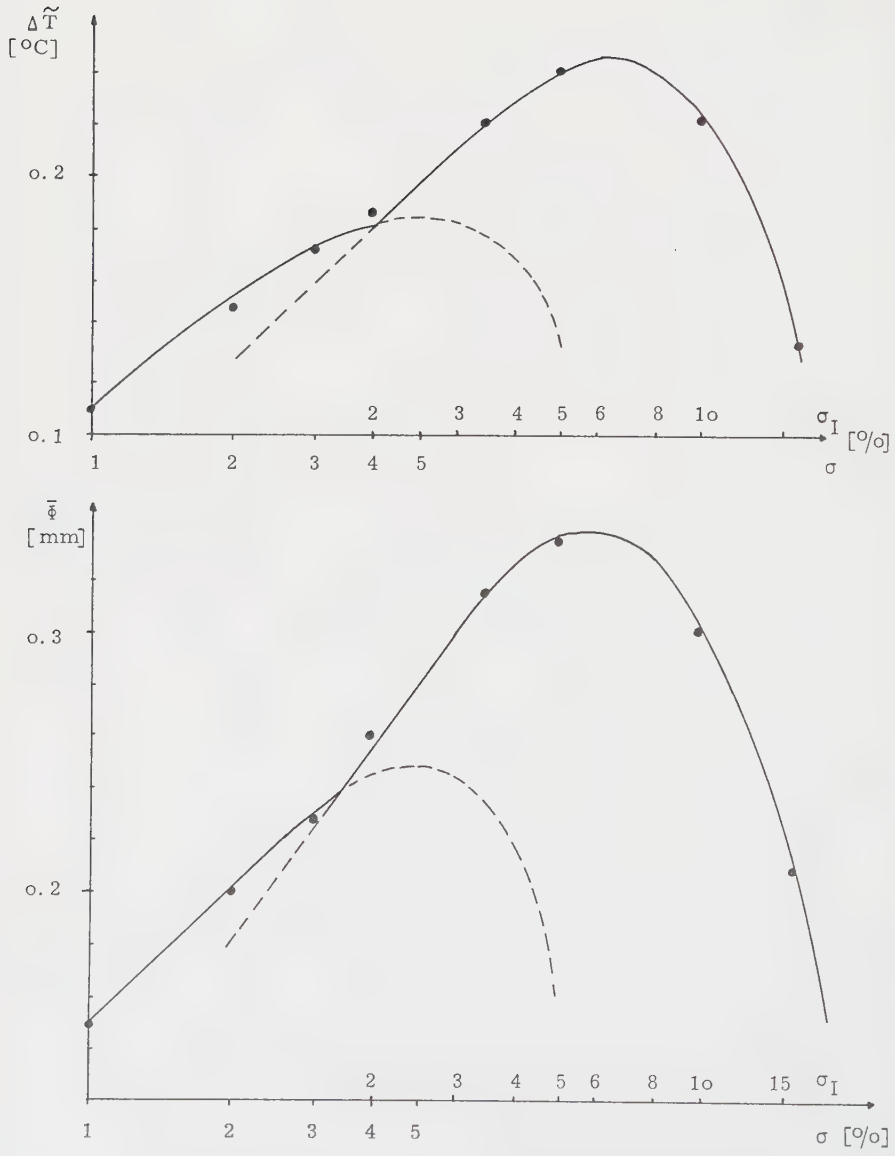


Abb. 3.21: Mittlere Erwärmung und Niederschlag für das Zweiwolkenexperiment IV.

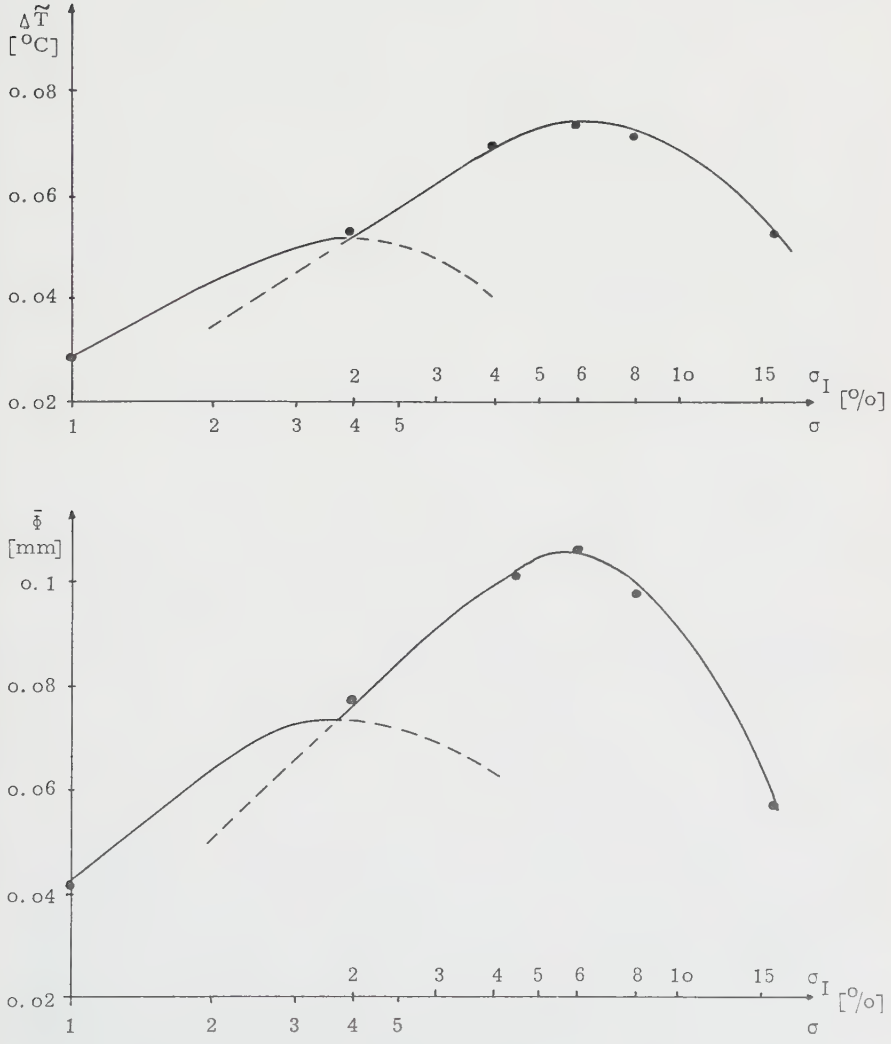


Abb. 3.22: Erwärmung und Niederschlag im Zweiwolkenexperiment VIII.

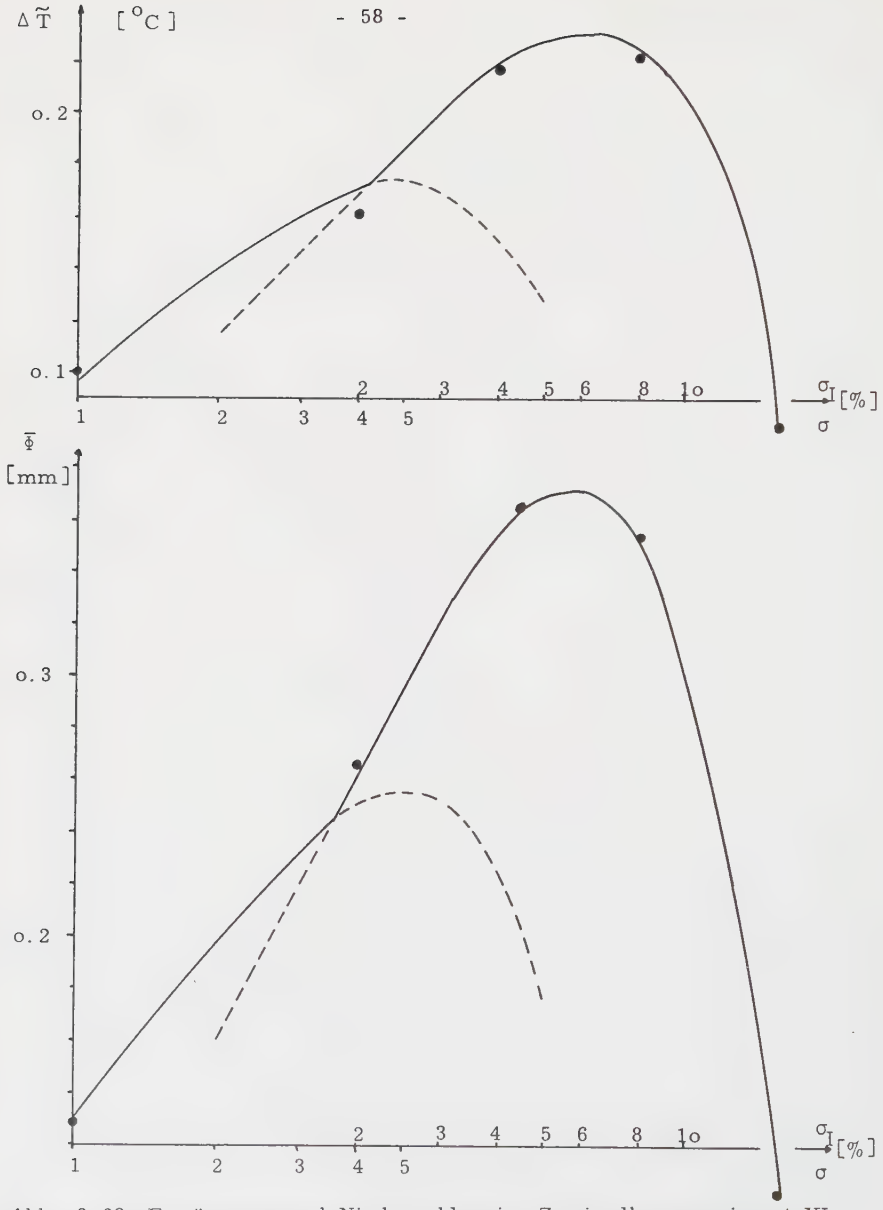


Abb. 3.23: Erwärmung und Niederschlag im Zweiwolkenexperiment XI.

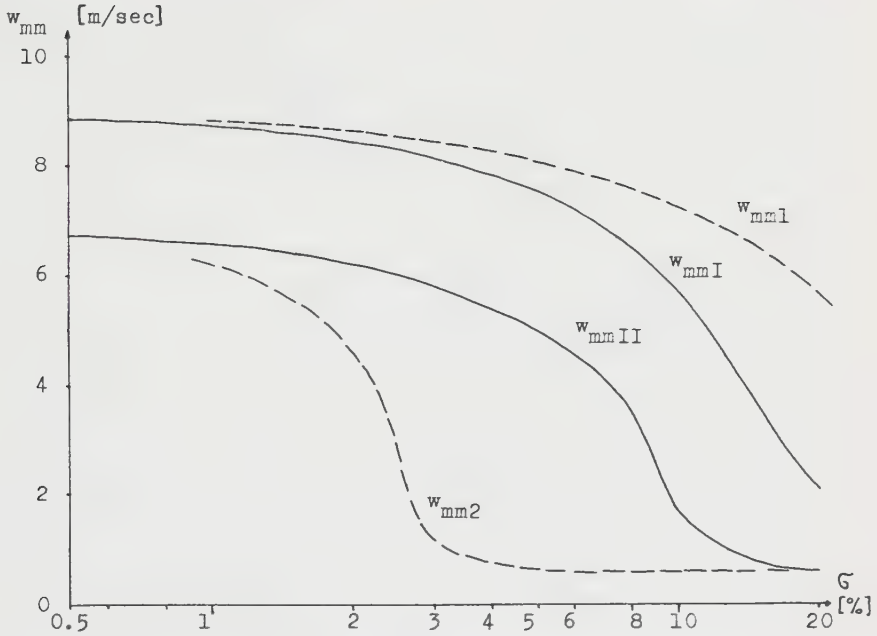


Abb. 3.24: Maximale Vertikalgeschwindigkeit der Einzelwolkenexperimente I und II (ausgezogenen Linien) und des Zweiwolkenexperiments IV (gestrichelte Linien)

Eine Interpretation der Abbildungen 3.21 bis 3.23 wird durch die gute Übereinstimmung der Punkte mit den dazugehörigen Kurven leichtgemacht.

Bei geringer Wolkenbedeckung σ, d.h. bei großer gemeinsamer Umgebung können beide Wolken nebeneinander existieren und sich beide voll entwickeln. Unterhalb einer bestimmten Umgebungsflächengröße setzt sich allein die stärkere Wolke durch und benutzt den für die schwächere Wolke vorgesehenen Raum zusätzlich für sich. Diese von den Endbilanzen ausgehenden Interpretation wird durch den zeitlichen Verlauf der Wolkenentwicklung bestätigt. Wesentlich ist dabei die daraus zu ziehende Folgerung, daß die Bedingungen am Beginn der Wolkenentwicklung (z.B. Anfangsstörungen) unmittelbar mit den zeitintegrierten Bilanzen von Temperatur und Feuchte verknüpft sind. Die unterschiedlichen σ - Werte für die Maxima in der Aufbauphase (K_{mm}) und der Gesamtbilanz ($\Delta\widetilde{T}$) spielen für die Entwicklung des Zweiwolkensystems offentsichtlich keine Rolle:

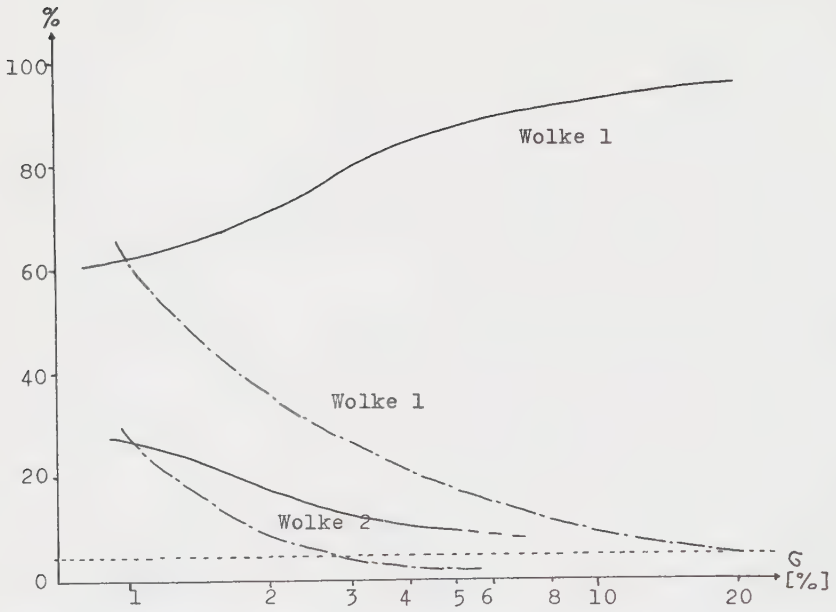


Abb. 3.25: Prozentuale Aufteilung der Gesamtfläche zwischen den beiden Wolken des Zweiwolkenexperiments IV (ausgezogene Linien) berechnet aus den maximalen Vertikalgeschwindigkeiten w_{mmi} der Einzelwolken I, II Strichpunktierte Linien: absolute Flächengrößen Gestrichelte Linien: minimale Flächengröße, die die Entwicklung einer Einzelwolke des Typs II zuläßt. Flächeneinheit: 100 $\hat{=}$ 200 km^2

Bereits in der Aufbauphase ist die Entwicklung dieses Zweiwolkensystems bereits so determiniert, daß die nach den Einzelwolkenexperimenten maximal mögliche mittlere Erwärmung und der maximal mögliche Niederschlag erreicht werden.

Diese Aussage über die Determiniertheit des Systems bzgl. der größtmöglichen Effizienz bereits in der Aufbauphase wird durch die Analyse der maximalen Vertikalgeschwindigkeit bestätigt (Abb. 3.24). Die Maxima der Vertikalgeschwindigkeit w_{mmi} werden in der ersten Entwicklungsphase erreicht. Einen steilen Abfall der Kurve von w_{mm2} (schwächere Wolke) finden wir in dem Bereich der relativen Wolkenbedeckungen, in dem sich die stärkere

Wolke allein durchsetzt.

Verwendet man die Kurven der maximalen Vertikalgeschwindigkeiten w_{mmi}, um aus ihnen für die Aufbauphase die relativen Anteile für beide Wolken an der Gesamtfläche zu berechnen, so erhalten wir Abbildung 3.25. Obwohl diese prozentuale Aufteilung lediglich aus den maximalen Vertikalgeschwindigkeiten gewonnen wurde, zeigt diese Darstellung doch die zunehmende Inbesitznahme des Gesamtgebietes durch die stärkere Wolke, während die schwächere immer mehr eingeschränkt wird, bis sie von $\sigma \approx 3\,\%$ an keine Überlebenschanzen mehr hat.

Zur Absicherung dieser Ergebnisse für das Zweiwolkensystem wurde ein weiteres Experiment mit drei Wolken durchgeführt. Die dritte Anfangsstörung lag in ihrer Wirkung zwischen den beiden bereits getesteten. Die Feuchtestörung $\Delta q_{da} = 0.45$ g/kg initiiert die konvektive Entwicklung über die in der Antriebsfunktion der Bewegungsgleichung auftretende Differenz der virtuellen Temperatur und im weiteren Verlauf der Entwicklung durch das frühe Einsetzen der Kondensation.

Die Darstellungen von $\Delta\tilde{T}$ und $\bar{\Phi}$ im Dreiwolkensystem (Abb. 3.26 und 3.27) zeigen dieselbe Struktur wie die des Zweiwolkensystems, wenn bei großen Bedeckungsgraden die gefüllten Kreise betrachtet werden. Die Werte, die die gefüllten Kreise repräsentieren, wurden folgendermaßen aus den numerischen Ergebnissen (offene Kreise) gewonnen:

1. Die Anfangsstörung der Wasserdampfkonzentration Δq_{da} wurde in eine Temperaturstörung

$$\Delta T_a = \frac{L}{c_p} \Delta q_{da}$$

umgerechnet und bei der Bilanz der Temperatur $\Delta\tilde{T}$ berücksichtigt:

$$\Delta\tilde{T} = \Delta\tilde{T}' - \frac{L}{c_p} \int_o^H \rho \, \Delta q_{da} \, dz \Big/ \int_o^H \rho \, dz \, \sigma_{III} \, .$$

2. Es wurde angenommen, daß

$$\sigma_{III} \int_o^H \rho \, \Delta q_{da} \, dz \Big/ \int_o^H \rho \, dz$$

zusätzlich zum normalen Niederschlag aus der Atmosphäre ausgewaschen wurde. Diese Annahme wird dadurch bestätigt, daß die Feuchtefelder der Einzelwolke I und des Dreiwolkenexperiments V im Endzustand ($t = t^*$) bei den entsprechenden Bedeckungsgraden nahezu identisch sind.

Aufgrund dieser Experimente mit Mehrwolkensystemen müssen wir die Frage nach dem wahrscheinlichsten Bedeckungsgrad neu überdenken. Im Einzelwolkenexperiment, das von den Symmetrieannahmen KASAHARAs und ASAIs ausgeht, erhalten wir die maximale Erwärmung und den größten Niederschlag je nach Stärke der Anfangsstörung zwischen 4 und 6.5 Prozent

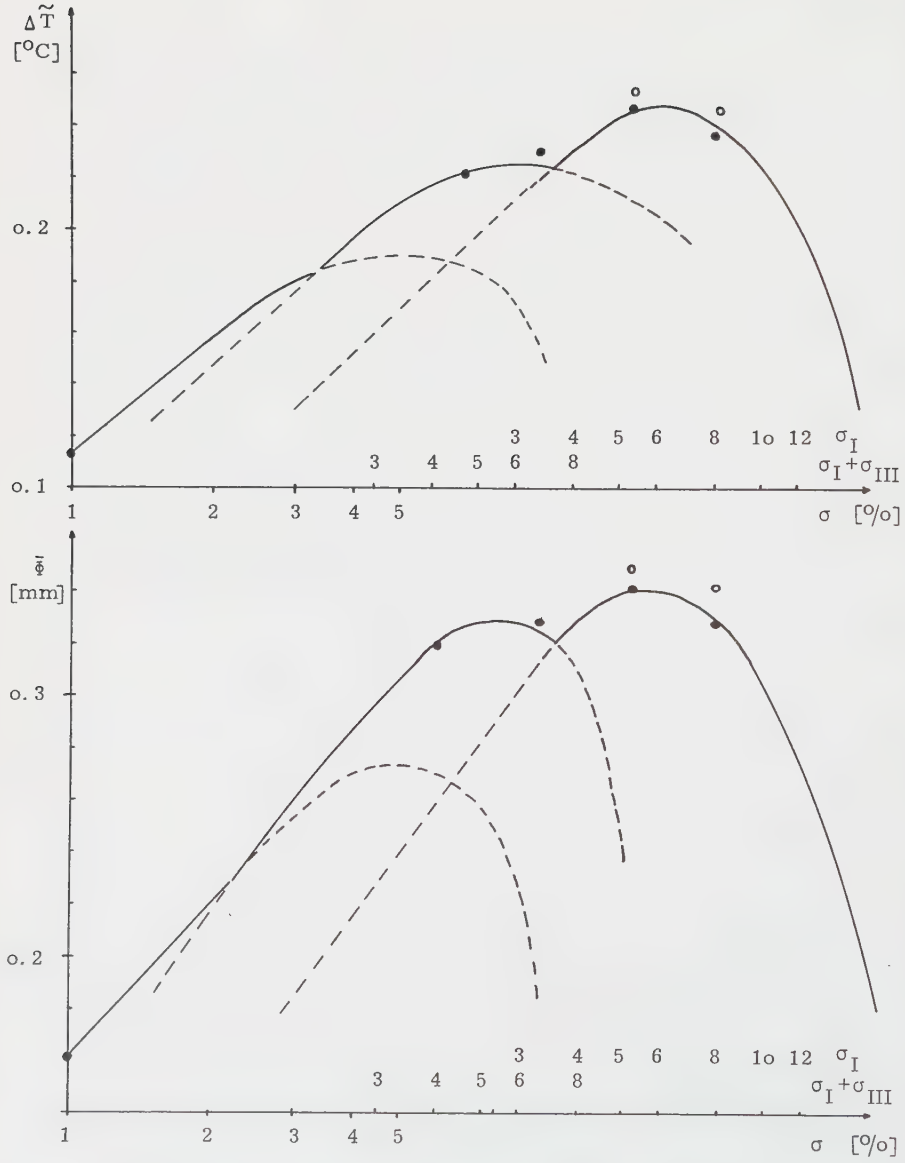


Abb. 3.26: Erwärmung und Niederschlag im Dreiwolkenexperiment V.

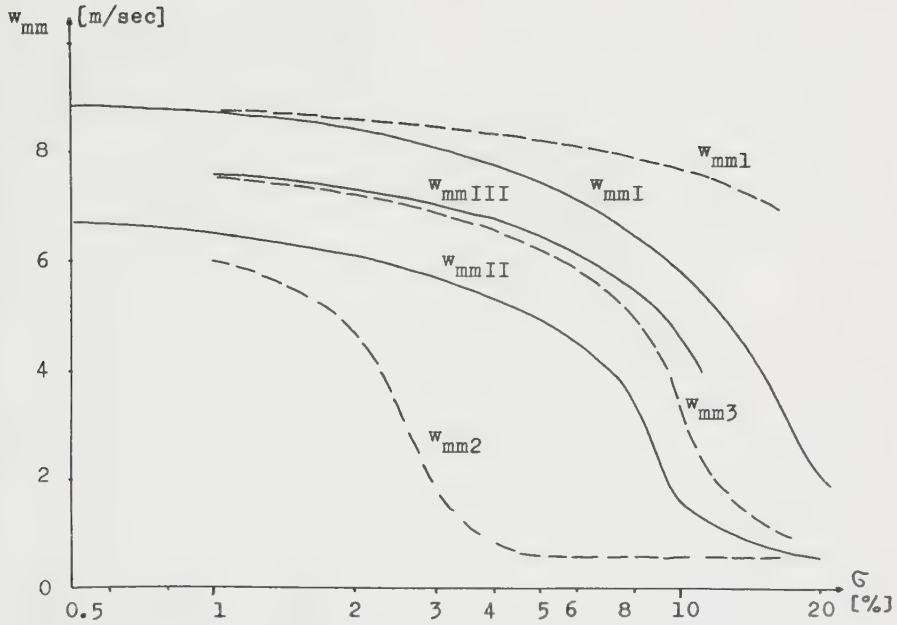


Abb. 3.27: Maximale Vertkalgeschwindigkeiten der Einzelwolkenexperimente I, II und III (ausgezogene Linien) und des Dreiwolkenexperiments V (gestrichelte Linien)

Wolkenbedeckung. Diese Bedeckungsgrade sind nur dann zu realisieren, wenn zur gleichen Zeit auf jeder Einheitsfläche gleich starke Störungen identische Konvektionszellen erzeugen. Nehmen wir jedoch an, daß stets Störungen des Grundfeldes in der Atmosphäre anzutreffen sind, diese aber unterschiedliche Amplituden besitzen, so werden von einem bestimmten Bedeckungsgrad an die schwächeren Wolken unterdrückt. Das geschieht bei den Bedeckungsgraden, die als die wahrscheinlichsten bei kleinen Anfangsstörungen galten. Wir müssen also entsprechend dem Spektrum der Anfangsstörungen mit einem mittleren Bedeckungsgrad rechnen, der - unter Anlegung der Maximalisierungsforderung von KASAHARA und ASAI (1967) - dem wahrscheinlichsten für die Wolken mit den schwächeren Anfangsstörungen entspricht.

Bei dieser Analyse sind wir noch von der Einschränkung der gleichzeitigen Anfangsstörungen ausgegangen. Unsere nächste Frage muß daher sein: Kann ein bestehendes Wolkenfeld durch neue Wolkenbildungen verdichtet werden?

Zur Beantwortung dieser Frage wurde zusätzlich zu einer entwickelten

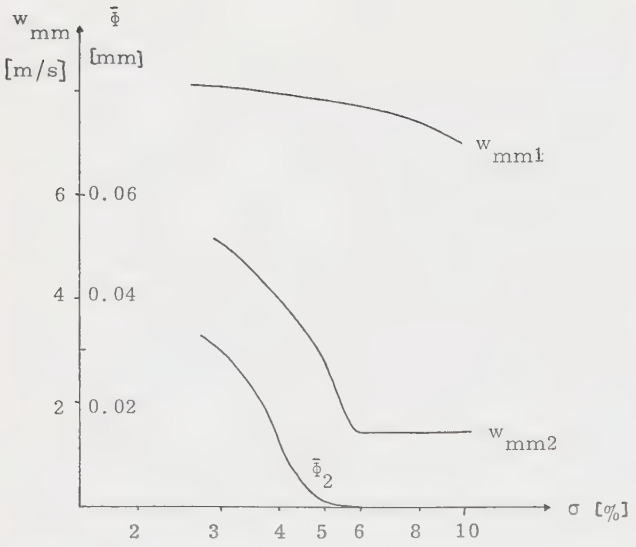


Abb. 3.28: Maximale Vertikalgeschwindigkeiten w_{mm1} und w_{mm2} sowie der aus der zweiten Wolke gefallene Niederschlag $\bar{\phi}_2$ bei einer Verzögerungszeit τ = 21 min und der Modellversion mit variablem Radius

Wolke eine zweite auf derselben Gesamtfläche initiert. Als Anfangsstörungen wurde in beiden Wolken ΔT_a = 0.56 °C gewählt. Die Zeitspanne zwischen dem Einbringen der beiden Anfangsstörungen wurde als Verzögerungszeit τ definiert und das Experiment für verschiedene Verzögerungszeiten zwischen 0 und 60 Minuten durchgeführt. Die schlechtesten Startchancen besaß die zweite Wolke bei einer Verzögerungszeit von etwa 20 min, d.h. bei maximaler Entwicklung der ersten Wolke kurz vor dem größten Niederschlagsausfall. Für τ = 21 min wurde daher geprüft, bei welchem Bedeckungsgrad sich eine zweite Wolke entwickeln kann. Bei der Modellversion mit variablem Radius ist eine Verdopplung der Wolkenbedeckung durch eine Neuentwicklung unterhalb von σ = 2.5 Prozent möglich (Abb. 3.28), bei konstantem Radius und Entrainmentformel 2. bei $\sigma \leq 2\,\%$ und bei Entrainment-Parametrisierung 5. zusammen mit konstantem Radius bei $\sigma \leq 1.5\,\%$. Diese Unterschiede in den verschiedenen Modellversionen sind auf die verschieden großen Absinkgeschwindigkeiten in der Wolkenumgebung beim Einbringen der zweiten Anfangsstörung zurückzuführen. Beim Modell mit dem variablen Radius sorgt der kleine Radius in der Mitte der Wolke (siehe Abb. 3.8) für geringe Abwärtsbewegungen, beim Modell mit der Entrainment-Parametrisierung

2. kann die ohnehin etwas geringere Vertikalgeschwindigkeit in der Wolke durch ein langsameres Absinken in der Umgebung kompensiert werden. Um den Effekt der Absinkbewegung in der Umgebung auf die Neuentwicklung auszutesten, wurde im Modell mit variablem Radius der minimale Radius von 6oo auf 65o m erhöht. Für σ = o.o2 und τ = 1o min zeigten sich die folgenden Unterschiede für die beiden Varianten:

Minimaler Radius:	65o m	6oo m
R^2_{min}	$42.25 \cdot 1o^4\ m^2$	$36 \cdot 1o^4\ m^2$
w_{mm2}	4.8 m/sec	5.5 m/sec
Maximaler Niederschlag:	o.4o2 mm/h	o.571 mm/h
$\Delta\widetilde{T}$	o.193 °C	o.222 °C
$\bar{\Phi}$	o.279 mm	o.294 mm

Die Intensität der zweiten Wolke war etwa im gleichen Maße geringer, wie die Fläche der ersten Wolke effektiv zunahm.

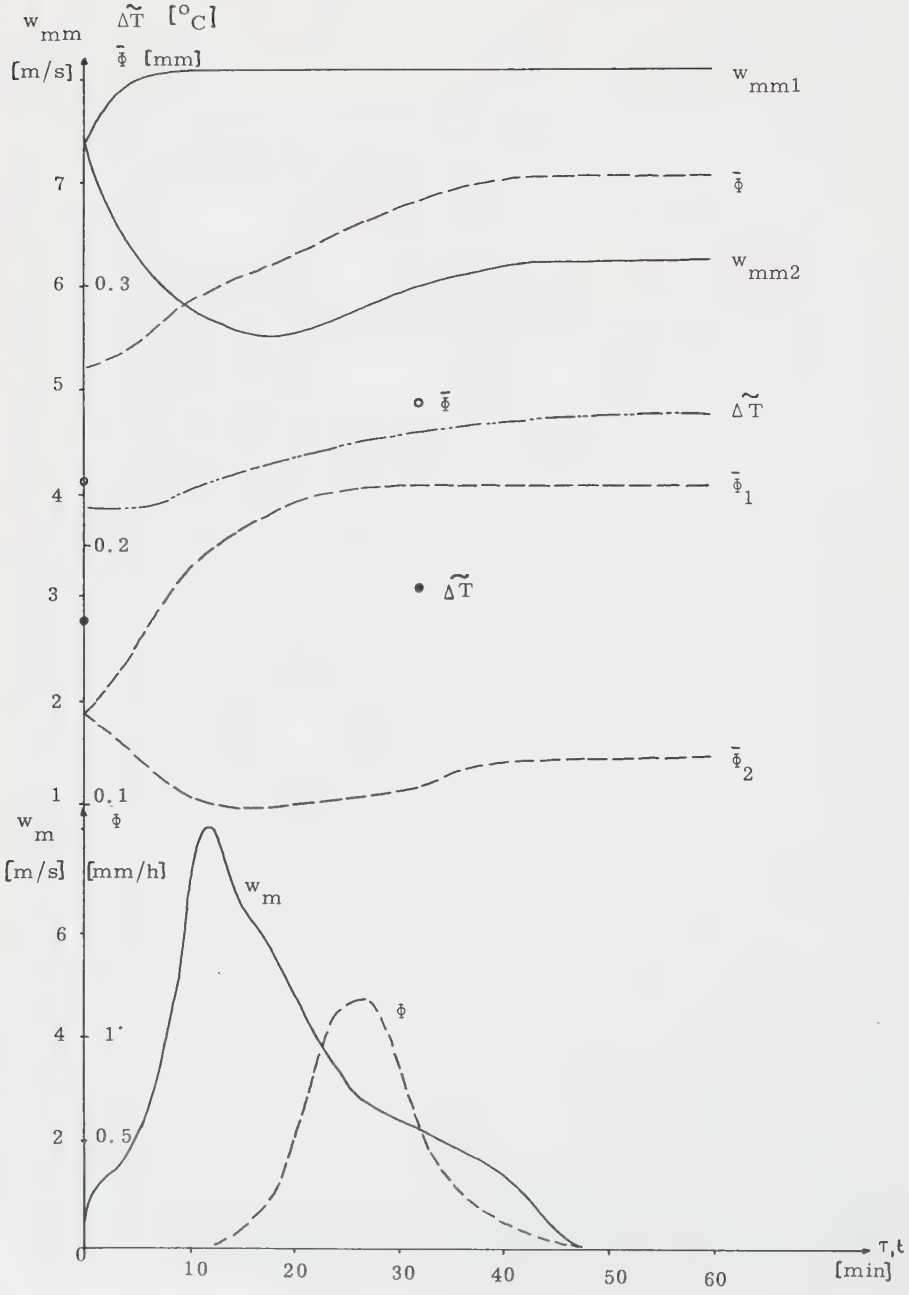
Nach 25 min physikalischer Zeit wird durch den ausfallenden Niederschlag eine negative Vertikalgeschwindigkeit in und unterhalb der ersten Wolke erzeugt. Die damit gekoppelte Aufwärtsbewegung in der Umgebung fördert die Entwicklung der zweiten Wolke, sodaß für $\tau \geq 25$ min wieder höhere Werte der Vertikalgeschwindigkeit, des Niederschlags und der mittleren Erwärmung erreicht werden (Abb. 3.29 und 3.3o), die, wie der Vergleich der Abbildungen 3.29 und 3.23 ergibt, sogar größer als die maximalen Werte des Einzelwolkenexperiments sein können, obwohl der Bedeckungsgrad hier kleiner ist als der, der zu den Maxima der Einzelwolke gehörte.

Wir hatten als Kriterium für den wahrscheinlichsten Zustand des konvektiven Systems die größte Erwärmung bzw. den größten Niederschlag angesehen. In Abbildung 3.29 sind neben den Kurven zwei Kreise eingezeichnet, die die Werte für $\Delta\widetilde{T}$ und $\bar{\Phi}$ kennzeichnen, die erreicht werden, wenn die bestehende erste Wolke ein zweites Mal mit einer Störung der Amplitude ΔT_a = o.56 °C geimpft wird. Diese nochmalige Aktivierung der bestehenden Konvektionszelle ist offentsichtlich weniger effektiv, als wenn dieselbe Störung zur Erzeugung einer neuen Wolke verwandt wird.

Unser Bild des wahrscheinlichsten Wolkensystems im konvergenzfreien Fall ist damit das folgende:
Bei der vorgegebenen vertikalen Temperatur- und Feuchteschichtung beträgt der wahrscheinlichste Bedeckungsgrad für die aktiven Wolkenkerne ('hot towers') etwa 4 Prozent, der Bedeckungsgrad an sichtbaren Wolken 1o bis 15 Prozent. Diese Werte sind geringer als die der Einzelwolkenexperimente

---

Abb. 3.29 auf der folgenden Seite: Maximale Vertikalgeschwindigkeiten w_{mmi}, mittlere Erwärmung $\Delta\widetilde{T}$, Niederschlagsanteile $\bar{\Phi}_i$ und Gesamtniederschlag bei verschiedener Verzögerungszeit für das Modell mit variablem Radius und σ = 4 %o. Darunter die zeitliche Entwicklung (max. Vertikalgeschwindigkeit w_m und Niederschlagsintensität Φ) der Wolke, neben der eine zweite entstehen soll (IX - 2).


w_mm
ΔT̃ [°C]
Φ̄ [mm]
[m/s]
w_mm1
Φ̄
w_mm2
0.3
Φ̄
ΔT̃
Φ̄1
0.2
ΔT̃
Φ̄2
0.1
Φ
w_m
[m/s]
[mm/h]
w_m
Φ
1
0.5
τ,t
[min]
10
20
30
40
50
60

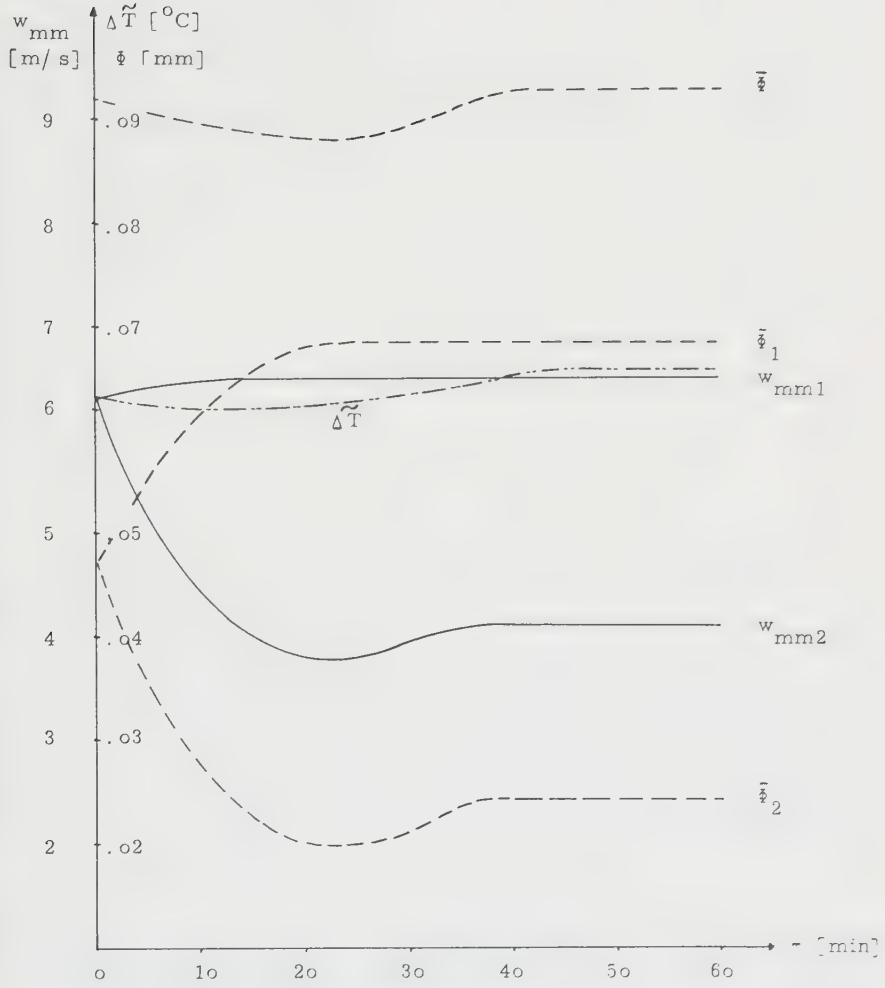


Abb. 3.30: Wie Abb. 3.29 jedoch für die Entrainment-Parametrisierung 2. und σ = 3 %o.

mit starken Anfangsstörungen, die nur im unwahrscheinlichen Fall der gleichzeitigen Erzeugung gleichstarker Wolken erreicht werden könnten. Wenn einige Wolken des Feldes ausregnen oder zerfallen, besteht die größte Wahrscheinlichkeit von Neuentwicklungen in ihrer Nähe. Auf diese Weise kann die Gesamtstruktur eines Wolkenfeldes erhalten bleiben. Das zeitweise Fehlen von einzelnen Wolken in einem Hexagonalfeld ist bereits von HUBERT (1967) beobachtet worden.

Ausgehend von diesem Hexagonalfeld können wir an ein Beobachtungsergebnis anknüpfen, das FRITZ (1966) statistisch aus Satellitenbildern ermittelt hat. Nach FRITZ beträgt das Verhältnis von Zelldurchmesser D zur Zellhöhe H_z (identisch mit der Inversionshöhe) 3o : 1. Wenn wir annehmen, daß der Rand einer geschlossenen Zelle vollständig mit Wolken besetzt ist, so erhalten wir für dasselbe Verhältnis

$$\frac{D}{H_z} = \frac{2}{3} \frac{1}{1 - \sqrt{1 - \sigma}} \approx \frac{4}{3\sigma} \quad ,$$

$$= \begin{cases} 22 : 1 & \text{für } \sigma = 6\ \% \\ 33 : 1 & \text{für } \sigma = 4\ \% \end{cases} .$$

3.4 Das Wolkensystem bei large-scale Konvergenz.

Bei der Simulierung konvektiver Entwicklungen im Falle ohne large-scale Konvergenz hatten wir uns darauf beschränkt, das einmalige Entstehen und Vergehen der Modellwolken zu simulieren. Wie die Versuche zur Verdichtung eines bestehenden Wolkenfeldes zeigten, wurde außer bei sehr kleinen σ - Werten das großräumige Feld bereits nach dieser einmaligen Entwicklung thermisch so stabilisiert, daß eine neue Entwicklung nur mit sehr starken Störungen des Grundfeldes eingeleitet werden kann.
Dieses Verhalten ändert sich, wenn eine bodennahe Konvergenz

$$-\nabla \cdot \bar{\bar{w}} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho \bar{\bar{w}}}{\partial z} = \frac{w_r}{z_r} \exp\left[1 - \frac{z}{z_r}\right]\left(1 - \frac{z}{z_r} + \frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln z}\right) ,$$

$$\bar{\bar{w}} = w_r \frac{z}{z_r} \exp\left[1 - \frac{z}{z_r}\right]$$

hinzu kommt, die ständig Wasserdampf nachführt und die Schichtung labilisiert. Bei den hier verwandten Werten w_r = 5 cm/sec, z_r = 8oo m beträgt die mittlere Konvergenz unterhalb 8oo m Höhe o.625 · 1o^{-4} sec^{-1}, eine Größe, die für große Konvektionsfelder nicht untypisch ist (GUTSCHE, JACOBSEN, PANKRATH (197o/71)).

Alle Experimente, deren Ergebnisse in diesem Abschnitt diskutiert werden sollen, wurden mit der Modellversion mit Entrainment-Parametrisierung 5. und konstantem Radius von 8oo m durchgeführt (Serie I, II und IV).

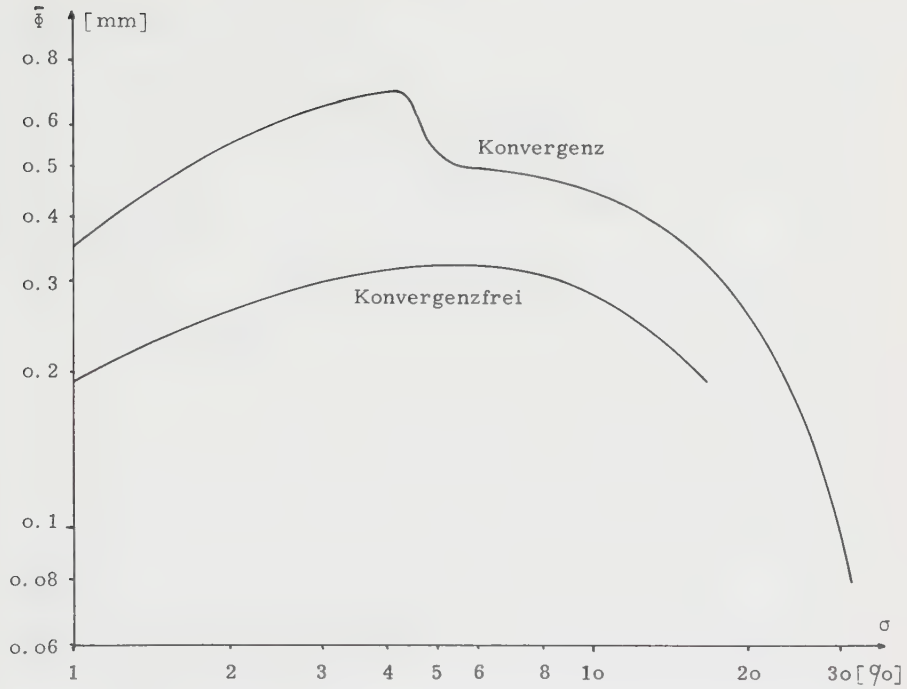


Abb. 3.31: Niederschlag im konvergenten und konvergenzfreien Fall bei einer Integrationsdauer $t^* = 6o$ min.

Ein Festhalten an der bisher bewährten Integrationsdauer $t^* = 6o$ min erwies sich, wie Abb. 3.31 zeigt, als unmöglich; denn die Kurve für den Niederschlag zerfällt in zwei Teile:

1. den der quasistationären Wolken

$$\sigma \leq o.o5 \quad \text{bei} \quad \Delta T_a = o.56\ ^oC\ ,$$
$$\sigma \leq o.o6 \quad \text{bei} \quad \Delta T_a = o.22\ ^oC\ .^*$$

2. den der Wolken, die sich nach einmaliger Entwicklung auflösen:

$$\sigma > o.o5 \quad \text{bzw.} \quad \sigma > o.o6.$$

In Abbildung 3.32 ist der zeitliche Verlauf der maximalen Vertikalgeschwindigkeit w_m und der Niederschlagsintensität Φ wiedergegeben; im

---

* Bei Verwendung der schwächeren Anfangsstörung wird die Modellatmosphäre durch die erste Wolkenentwicklung noch nicht so sehr ausgetrocknet, daß auch die Wolke mit $\sigma = 6\,\%$ in den quasistaionären Bereich fällt.

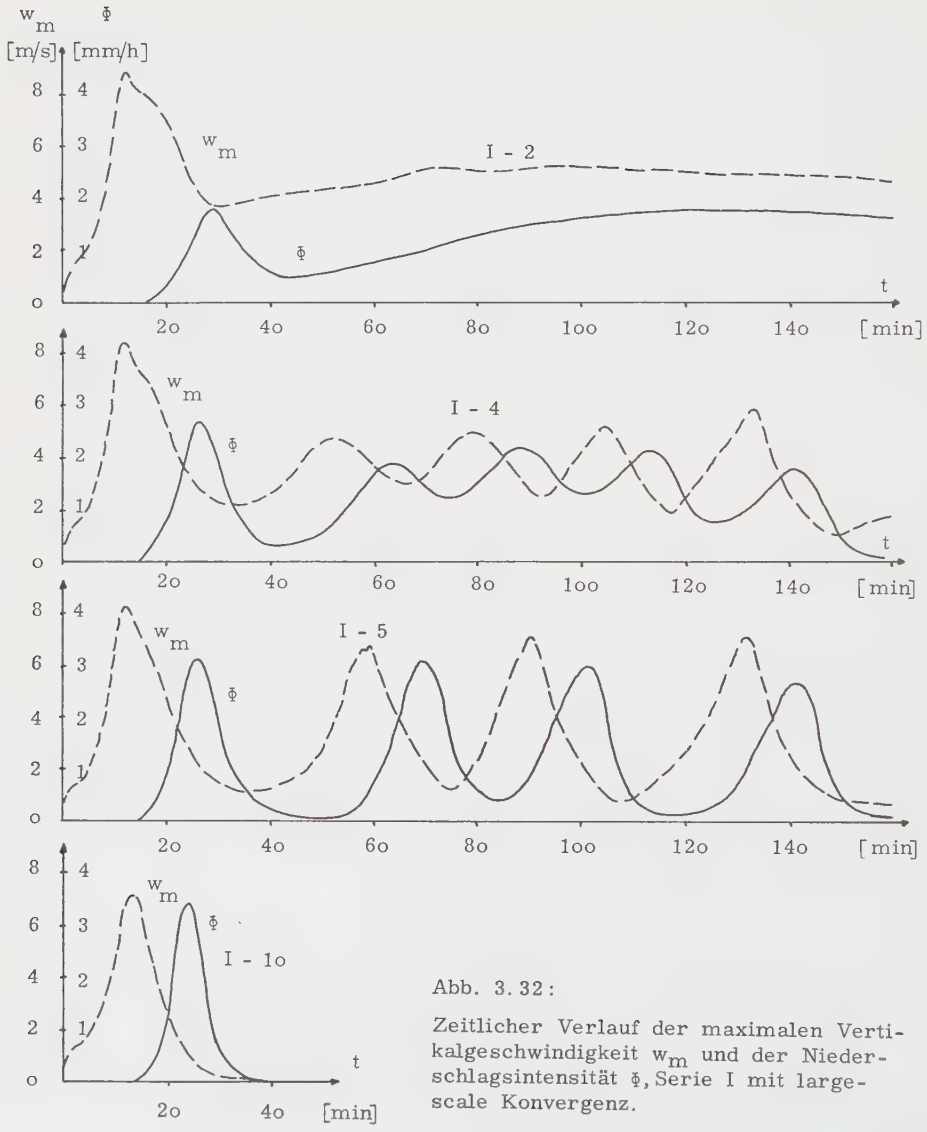


Abb. 3.32:

Zeitlicher Verlauf der maximalen Vertikalgeschwindigkeit w_m und der Niederschlagsintensität Φ, Serie I mit large-scale Konvergenz.

Bereich kleiner Bedeckungsgrade können wir neben dem fast stationären Fall ($\sigma \leq 2\,\%$) auch oszillierende Wolke mit Lebensdauern von etwa 40 min feststellen. Da wegen der ständigen Wasserdampfzufuhr durch die bodennahe Konvergenz auch alle Wolken, die Bedeckungsgrade bis über 10 % repräsentieren, durch neue Störungen des Grundfeldes wieder zu neuem Leben erweckt werden können und dann einen ähnlichen oszillierenden Charakter annehmen, wie es bei den geringeren σ - Werten der Fall ist, ist eine Wahl der Integrationsdauer, die einen zuverlässigen Vergleich der Effektivität der verschiedenen Wolken zuläßt, nahezu unmöglich.
Ein Vergleich wurde daher auf die folgende Weise versucht:

1. Die Integrationsdauer wurde bis zu drei Stunden physikalischer Zeit variiert.
2. Beim oszillierenden Wolkentyp wurde die Effektivität einzelner Perioden untersucht.

Die Ergebnisse dieser Analyse lassen sich folgendermaßen zusammenfassen:

1. Innerhalb einer Variationsbreite von ± 10 % liefern alle Wolken von $\sigma = 0.014$ bis $\sigma = 0.08$ dieselbe Niederschlagsmenge.
2. Diese Niederschlagsmenge ist offentsichtlich von der Wahl der Störungen des large-scale-Feldes unabhängig. Sie wird nur kontrolliert von der Zufuhr durch die großräumige Konvergenz. D. h. alle Wolken, die Bedeckungsgrade zwischen 1.4 und 8 Prozent repräsentieren, sind gleichermaßen in der Lage, die Möglichkeiten auszuschöpfen, die die großräumige Konvergenz der Konvektion bietet.
3. Wolkenfelder, die entweder dünner ($\sigma < 0.014$) oder dichter ($\sigma > 0.08$) besetzt sind, waren über die Dauer von drei Stunden nicht imstande, die Wasserdampfzufuhr aus der Konvergenz aufzubrauchen. Bei diesen Konvektionsfeldern muß eine Verdichtung oder Verdünnung der Bewölkung einsetzen, um ein Gleichgewicht mit der large-scale Konvergenz herzustellen.

Durch ein Maximalisierungskonzept können wir daher in diesem Fall keinen diskreten Wert der relativen Bedeckung als den wahrscheinlichsten auszeichnen sondern nur einen Bereich für die wahrscheinliche Entwicklung durch $0.014 \leq \sigma \leq 0.08$ einengen.

Dieser Bereich kann durch die folgenden Untersuchungen verkleinert werden:
Wir nehmen an, daß stets Störungen des large-scale-Feldes vorhanden sind, die geeignet sind, neue Konvektionszellen zu erzeugen, wenn die vorhandene Wolkenverteilung das zuläßt.

Um zu prüfen, welcher Bereich der Bedeckungsgrade in dem Sinne instabil ist, daß sich durch neue Störungen eine dichtere Bewölkung einstellt, wurde zuerst das Zwei-Wolken-Experiment mit den Anfangsstörungen $\Delta T_a = 0.56$ und $0.22\,^{\circ}C$ wiederholt. Bei der vorliegenden großräumigen Konvergenz vollzieht sich der Übergang vom Zweiwolkensystem zur Einzelwolke bei $\sigma \approx 5\,\%$ (Abb. 3.33), d. h. bereits durch relativ schwache Störungen neben einer starken Störung können Bedeckungsgrade bis zu 5 Prozent er-

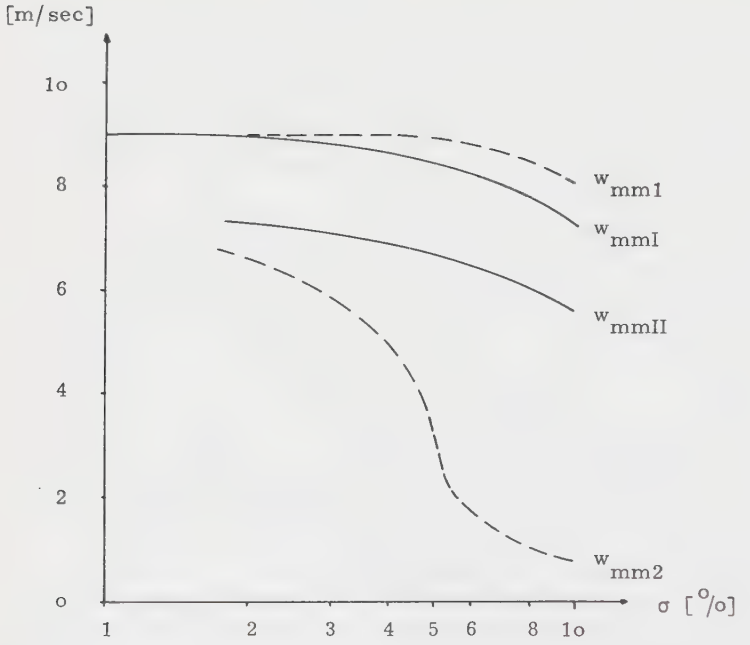


Abb. 3.33: Maximale Vertikalgeschwindigkeiten der Einzelwolkenexperimente I und II (ausgezogene Linien) sowie des Zweiwolkenexperiments IV (gestrichelte Linien) bei large-scale Konvergenz.

reicht werden. Damit erweist sich der Bereich $\sigma \leq 5\,\%$ als relativ instabil bezüglich weiterer Inhomogenitäten im large-scale-Feld.

Auch wenn zu späteren Zeitpunkten Störungen in der Umgebung auftreten, kann ein anfangs mit nur wenigen Wolken besetztes Konvektionsfeld dichter werden. Bei einer Verzögerungszeit τ = 21 min und einer zweiten Störamplitude ΔT_a = o.56 °C kann sich neben einer bestehenden Wolke eine zweite entwickeln, wenn der Bedeckungsgrad vorher nicht mehr als 3 Prozent betrug (Abb. 3.34). Bei anderen Verzögerungszeiten zwischen dem Einbringen der verschiedenen Störungen erhalten wir fast stets dasselbe Bild:

- Wird die relative Wolkenbedeckung von einem Wert kleiner oder gleich 3 % aus verdoppelt, so können beide Wolken nebeneinander existieren.
- Bei Ausgangswerten größer als 3.5 % kann sich eine zweite Wolke nur zu bestimmten Zeitpunkten entwickeln, nur dann, wenn die Intensität der vorhandenen Wolke gering ist.

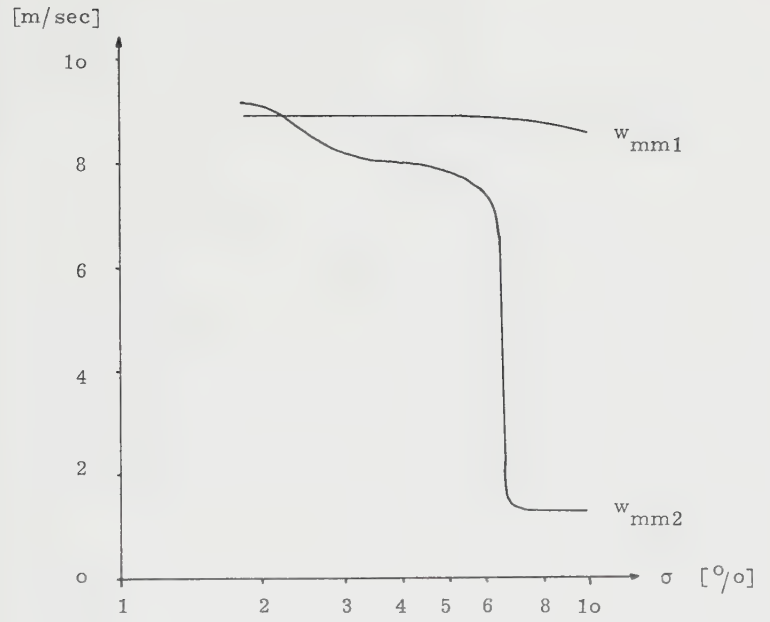


Abb. 3.34: Maximale Vertikalgeschwindigkeiten Serie I mit Konvergenz Verzögerungszeit τ = 21 min.

- Liegt der Ausgangswert über 4 %o, so ist nur in seltenen Fällen eine gleichzeitige Existenz beider Wolken möglich.

Daher sind Wolkenfelder mit Bedeckungsgraden zwischen 1.4 und 3 %o weniger wahrscheinlich, weil sie sich als instabil gegenüber neuen Wolkenentwicklungen erweisen. Am wahrscheinlichsten sind Wolkenfelder mit Bedekkungsgraden zwischen 5 und 8 %o; bei ihnen tritt neben die Möglichkeit der Balance mit dem large-scale-Feld die Resistenz gegen die Vergrößerung der Wolkendichte.

Für dieses quasistationäre Konvektionsfeld sollen die hier ermittelten σ-Werte mit denen verglichen werden, die das KUOsche Verfahren liefert. Wird als Zeitscale Δt die halbe Periode der Oszillationen verwandt, so liegt das Ergebnis der bilancierenden Methode nach KUO (1965) mit σ = 6.5 %o innerhalb des 'wahrscheinlichsten' Bereichs. Bei Verwendung der vollen Lebensdauer erhalten wir jedoch einen Wert für die mittlere Wolkenbedeckung, der mit σ = 13 %o wesentlich größer ist als der, den die direkte Simulierung der Konvektion vorhersagt. Dieser große Spielraum in der Wahl des Zeitscales läßt die Bestimmung der Bedeckungsgrade nach KUO sehr ungenau werden.

Die oft registrierte Unterschätzung der konvektiven Aktivität in tropischen Gebieten durch die bilanzierenden Verfahren (siehe z.B. KRISHNAMURTI (1968)) legt einen weiteren Vergleich der verschiedenen Methoden zur Bestimmung der relativen Bedeckung nahe:

1. Die Bilanzmethoden (KUO (1965), ROSENTHAL (1968)) liefern je nach Stärke der großräumigen Konvergenz ein großes Spektrum von σ - Werten.
2. Die direkte Simulation der konvektiven Entwicklung, wie wir sie in dieser Arbeit vorgenommen haben, läßt nur einen kleinen Bereich von Bedeckungsgraden als wahrscheinlich zu. Dieses Ergebnis stimmt mit dem von KASAHARA und ASAI (1967) überein, die nur eine sehr geringe Verschiebung der Maxima des vertikalen konvektiven Wärmestroms in Abhängigkeit von der large-scale Konvergenz feststellten.

Diese enge Begrenzung des Bereichs der wahrscheinlichen Bedeckungsgrade durch die der Konvektion innewohnenden Mechanismen muß bei jeder Parametrisierung auf der Basis des σ - Konzepts berücksichtigt werden. Dazu ist es notwendig, für verschiedene large-scale Bedingungen (vertikale Profile von Temperatur, Feuchte und mittlerer Konvergenz) einen Kataster für die wahrscheinlichen Bedeckungsgrade σ und die damit verknüpften Werte $\hat{A}_i$, $\hat{A}_e$, $\hat{w}_i$ und $\hat{w}_e$ anzulegen.

LITERATUR

DÖÖS, Bo R. (1969) — Numerical experimentation related toGARP, Stockholm 1969, 8o p.

FORTAK, H. (1968) — Die Methode der Filteranalyse in der atmosphärischen Energetik, Inst. f. Theor. Met. Berlin 1968

FRITZ, S. (1966) — Local circulations as seen from satellite cloud pictures, NCAR - TN 11, 135 - 162.

GUTSCHE, B. JACOBSEN, I. und PANKRATH, J. (197o/71) — Untersuchungen zur Parametrisierung organisierterKonvektionsphänomene, DFG-Berichte 197o und 1971.

HALTINER, G. J. (1959) — On the theory of convective currents, Tellus 11, 4 - 15.

HUBERT, L. F. (1967) — The satellite observations of convective systems, Thermal convection: A colloquium NCAR - TN - 24, 481 - 488.

KASAHARA, A. (1964) — A numerical model of tropical cyclones, WMO with the IUGG, Proc. Symp. Trop. Met., Rotorua, New Zealand 1963, Welligton 1964, 65o - 659.

KASAHARA, A. und ASAI, T. (1967) — Effects of an ensemble of convective elements on the large-scale motions of the atmosphere, J. Met. Soc. Japan 45, 28o - 29o.

KESSLER, E. (1969) — On the distribution and continuity of water substance in atmospheric circulations, Met. Monogr. Vol. 1o, No. 32, 84 p.

KOENIG, L. R. (1963) — The glaciating behavior of small cumulonimbus clouds, J. Atm. Sci. 2o, 29 - 47.

KRISHNAMURTI, T. N. (1968) — A calculation of percentage area covered by convective clouds from moisture convergence, J. Appl. Met. 7, 184 - 195.

KUO, H.L. (1965) — On the formation and intensification of tropical cyclones through latent heat released by cumulus convection, J. Atm. Sci. 22, 4o - 63.

LILLY, D. K. (1965) — On the computational stability of numerical solutions of time - dependent non - linear geophysical fluid dynamics problems, Mon. Wea. Rev. 93, 11 - 25.

MARSHALL, J. S. und PALMER, W. McK. (1948) — The distribution of raindrops with size, J. Met. 5, 165 - 166.

MIYAKODA, V. (1962) — Contribution of the numerical weather prediction with finite differences, Japan J. Geoph. 3, 75 - 19o.

ROSENTHAL, S. L. (1968) — Preliminary results from numerical experiments with a primitive equation model designed to simulate the development of tropical cyclones, Tokyo - Symposium, Nov. 1968.

ROUSE, H. und DODU, J. (1955) — Diffusion turbulente à travers une discontinuité de densité, Houille Blanche 1o, 522 - 532.

SPILHAUS, A. F. (1948) — Raindrop size, shape, and falling speed, J. Met. 5, 1o8 - 11o.

SQUIRES, P. und TURNER, J. S. (1962) — An entraining jet model for cumulonimbus updraughts, Tellus 14, 422 - 434.

TAKEDA, T. (1966) — The downdraft in convective cloud and raindrops: A numerical computation, J. Met. Soc. Japan 44, 1 - 11.

TELFORD, J. W. und WARNER, J. (1962) — On the measurement from an aircraft of buoyancy and vertical air velocity in clouds, J. Atm. Sci. 19, 415 - 423.

WARNER, J. und andere (197o/71) — Diskussion:

WARNER, J. — On steady - state one - dimensional models of cumulus convection, J. Atm. Sci. 27 (197o), 1o35 - 1o4o.

SIMPSON, J. — On cumulus entrainment and one - dimensional models, J. Atm. Sci. 28 (1971), 449 - 455.

COTTON, W. R. — Comments on 'steady - state one - dimensional models of cumulus convection', J. Atm. Sci. 28 (1971), 647 - 648.

WEINSTEIN, A. I. — Comments on 'steady - state one - dimensional models of cumulus convection', J. Atm. Sci. 28 (1971), 648 - 651.

WARNER, J. — Reply, J. Atm. Sci. 28 (1971), 651 - 652.

WEINSTEIN, A. I. und DAVIS, L. G. (1967) A parametrized numerical model of cumulus convection, Dept. of Met., Penn State Univ., Dez. 1967.

WEINSTEIN, A. I. (1969) A numerical model of cumulus dynamics and microphysics, Dept. of Met., Penn State Univ., Jan. 1969.

Symbolliste

A	beliebige abhängige Variable
A_d	molekularer Austauschkoeffizient für Wasserdampf
B	Antriebsfunktion
$Coll(r)$	Einfangrate von Wolkentröpfchen durch Regentropfen des Radius r
$Coll$	Gesamteinfangrate
$Conv$	Umwandlungsrate von Wolkentröpfchen in Regentropfen
D	Durchmesser von Sechseckzellen
$D(A)$	Diffusionsoperator
E	Effektivität der Gravitationskoaleszenz
$\mathfrak{E}$	vertikaler Feuchtestrom in der Grenzschicht
$\tilde{E}$	zeitintegrierte mittlere Feuchtedivergenz in der PRANDTL-Schicht
$E_{i,e}$	Entrainmentfunktionen
$\tilde{E}_i$	dimensionslose Entrainmentfunktion
$Evap$	Evaporationsrate von Regentropfen
F	Gesamtfläche des Modells
F_o	Proportionalitätskonstante in Gl. 48
F^*	Ventilationsfaktor bei der Verdunstung von Regentropfen
H	Höhe des Modells
$\mathfrak{H}$	vertikaler Wärmestrom in der Grenzschicht
$\tilde{H}$	zeitintegrierte mittlere Wärmedivergenz in der PRANDTL-Schicht
H_z	Höhe der Konvektionszellen
K	Zahl der vertikalen Schichten
$\mathbb{K}_A$	Tensor der Diffusionskoeffizienten
K_{Ah}	horizontaler Diffusionskoeffizient
K_{Az}	vertikaler Diffusionskoeffizient
K_d	molekularer Diffusionskoeffizient für Wasserdampf
$\overline{K}_{mm}$	maximale kinetische Energie der Vertikalbewegungen
$K_{1,2,3,4}$	Proportionalitätskonstanten in den Mikrophysikgleichungen
L	spezifische Kondensationswärme
L_i	Länge des Randes der konvektiven Elemente
M	Masse der vertikalen Luftsäule pro Einheitsfläche
$M(r)$	Masse des Regentropfens des Radius r
M_f	Impuls der Relativbewegung der Regentropfen
N	Zahl der Wolken im Kollektiv
N_o	Zahl der kleinsten Tröpfchen (Limes des Radius O)
R	Radius des konvektiven Elements
S	Fläche des konvektiven Elements

T	absolute Temperatur
T_v	virtuelle Temperatur
$\tilde{T}$	Referenztemperatur (bei der Reihenentwicklung der Dampfdruckformel)
U	Windgeschwindigkeit in 10 m Höhe
$V(d)$	Fallgeschwindigkeit eines Regentropfens des Durchmesser d
V_o	Proportionalitätskonstante in der Gleichung für die Fallgeschwindigkeit der Regentropfen
a	Schwellenwert für die Umwandlung von Wolkentröpfchen in Regentropfen
c_D	Koeffizient der Bodenreibung
c_p	spezifische Wärme der Luft bei konstantem Druck
d	Durchmesser der Regentropfen
$f(d)$	Tropfengrößenverteilungsfunktion
g	Erdbeschleunigung
h	Höhe der PRANDTL-Schicht im Modell
m	Mischungsverhältnis von Wasserdampf plus Wolkentröpfchen
q	Mischungsverhältnis
q_a	adiabatisches Mischungsverhältnis
q_c	Mischungsverhältnis der Wolkentröpfchen
q_d	Mischungsverhältnis von Wasserdampf
q_d^*	Sättigungsmischungsverhältnis von Wasserdampf
q_f	Mischungsverhältnis von Flüssigwasser (Wolkentröpfchen plus Regentropfen)
q_p	Mischungsverhältnis der Regentropfen
r	Radius der Regentropfen, Radius im zylindersymmetrischen Modell
t^*	Integrationsdauer
$u(r)$	Radialgeschwindigkeit im zylindersymmetrischen Modell
u_{Ri}	Normalkomponente der horizontalen Windgeschwindigkeit am Rand des konvektiven Elements
$\mathbf{v}_h$	horizontaler Windvektor
w	Vertikalgeschwindigkeit
w_r	maximale Vertikalgeschwindigkeit durch large-scale Konvergenz
z_r	konvergenzfreies Niveau der bodennahen large-scale Konvergenz

$\Delta\tilde{A}$	Differenz der Gesamtflächenmittelwerte zwischen Ende und Anfang der Zeitintegration
$\Delta_R\tilde{A}$	Summe der Terme der rechten Seiten in den Bilanzgleichungen 71 und 72
ΔA_a	Anfangsstörungen
$\Delta\tilde{q}$	mittlere Feuchteänderung
$\Delta\tilde{T}$	mittlere Temperaturänderung
Δt	Zeitschritt der numerischen Integration
Δz	vertikaler Raumschritt
Φ	Niederschlagsrate
$\bar{\Phi}$	Gesamtniederschlag während der Integrationsdauer
$\tilde{\Phi}$	Gesamtniederschlag pro "Masse M"
Φ_K	Kondensationsrate
$\bar{\Psi}$	Kondensation von Wasserdampf während der Integrationsdauer
$\tilde{\Psi}$	Kondensation pro "Masse M"
α	Entrainmentkonstante
β	Konstante im Differenzenverfahren von MIYAKODA zur zeitlichen Glättung
γ_i	dimensionslose Normalableitungen am Rand der konvektiven Elemente
γ_w	Entrainmentkonstante im Entrainmentansatz 5.
δ	Äquivalenttemperatur
δA	Differenz der Werte von A am inneren und äußeren Rand der konvektiven Elemente
$\delta_E A$	Fehler, der in der Gesamtbilanz durch $\delta A \neq 0$ entsteht.
λ	Neigung der Tropfengrößenverteilungsfunktion
ρ	Dichte der trockenen Luft
ρ_c	Dichte der Wolkentröpfchen
ρ_d	Dichte des Wasserdampfs
ρ_d^*	Sättigungsdichte des Wasserdampfs
ρ_p	Dichte der Regentropfen
ρ_w	Wasserdichte
σ	relative Flächenbedeckung mit konvektiven Elementen
τ	Zeitdifferenz zwischen dem Einbringen verschiedener Anfangsstörungen
$\overline{\tau}_A$	turbulenter Fluß von A

Indizes und Mittelungen

A_B	Bodenwert von A
A_e	Wert von A in der Wolkenumgebung bzw. Mittelwert von A für die Wolkenumgebung
A_F	Wert von A am Rand der Gesamtfläche F
A_i	Wert von A im konvektiven Element der Nummer i ($i = 1,\ldots,N$) bzw. Mittelwert von A für das konvektive Element i
A_m	Maximum des vertikalen Profils von $\|A\|$
A_{mm}	absolutes Maximum von $\|A\|$ während der gesamten Integrationsdauer
A_r	Relativwert in der Empfindlichkeitsanalyse = A_{mm}/A_{mmo}
A_{Ri}	Wert von A am Rande des konvektiven Elements i
A_o	Referenzwert
A_{10}	Wert von A in 10 m Höhe
A_-	Wert von A an der inneren Seite einer Randfläche
A_+	Wert von A an der äußeren Seite einer Randfläche
A^j_k	Wert von A beim Zeitschritt j und auf der Höhenfläche k
$\tilde{A}^j_k$	Wert der rechten Seite der prognostischen Gleichung für die Variable A in numerischer Approximation zum Zeitschritt j und auf der Fläche k
$\overline{A}$	Mittel über die Gesamtfläche F
A'	Abweichung von $\overline{A}$
$\hat{A}$	baryzentrisches Mittel
A''	Abweichung von $\hat{A}$

LEBENSLAUF

Am 19. April 1943 wurde ich als Sohn des Realschullehrers Wilhelm Jacobsen und seiner Ehefrau Anna Maria geb. Jacobsen in Eutin geboren. Ab 1949 besuchte ich die Knabenvolksschule Eutin und seit 1953 das Johann-Heinrich-Voß-Gymnasium, an dem ich am 8. Februar 1962 die Reifeprüfung ablegte. Anschließend begann ich das Studium der Meteorologie an der Freien Universität Berlin. Nach dem am 2o. Juli 1964 abgelegten Vordiplom war ich zwei Semester an der Universität Hamburg immatrikuliert. Danach kehrte ich an die Freie Universität Berlin zurück und bestand am 8. Mai 1968 dort die Diplomprüfung. Im August/September 197o nahm ich an der École d'été de physique spatiale in Lannion (Frankreich) teil. Vom 1. Juli 1968 bis zum 31. März 1972 arbeitete ich als wissenschaftlicher Angestellter am Institut für Theoretische Meteorologie unter Leitung von Prof. Dr. H. Fortak an einem von der Deutschen Forschungsgemeinschaft geförderten Forschungsvorhaben. Seit dem 1. April 1972 bin ich als wissenschaftlicher Assistent in der WE Meteorologie und Geophysik tätig.